Material de Estudio del Proceso de Nuevo Ingreso a la UTGZ 2024

Contenido

PRESENTACIÓN 6
ESPAÑOL 7
ÁREA ESTRUCTURA DE LA LENGUA 7
Categorías gramaticales o tipos de palabras 7
El sustantivo o nombre 7
Pronombres 8
El adjetivo 9
El verbo 10
El adverbio 10
La preposición 12
La conjunción 12
Los determinantes 13
Las Interjecciones 13
REGLAS ORTOGRÁFICAS 14
Acentuación 14
Relaciones semánticas 18
La sinonimia y la antonimia 19
La polisemia y la homonimia 19
Lógica textual 19
ÁREA COMPRENSIÓN LECTORA 21
Tipos de textos 23
Textos argumentativos 23
Textos apelativos 23
Textos expositivos 23
Textos históricos 24
Textos periodísticos 24
Textos académicos 25
Textos literarios 25
MATEMÁTICAS 27
ARITMÉTICA 27
Operaciones combinadas sin agrupar 27
Combinación de sumas y restas 27
Combinación de sumas, restas y productos 27
Combinación de sumas, restas, productos y cocientes 27
Combinación de sumas, restas, productos, cocientes y potencias 27

Operaciones combinadas agrupadas 28
Fracciones 28
Concepto de fracción 28
Tipos de fracciones 29
Operaciones con fracciones 29
Conversión de fracciones impropias a mixtas 30
Conversión de fracciones mixtas a impropias 30
Potenciación de fracciones 30
Potenciación múltiple de fracciones 30
Radicación de fracciones 31
Operaciones combinadas agrupadas con fracciones 31
Operaciones empleando jerarquía 31
Jerarquía de Operaciones 31
Porcentajes, razones y proporciones 31
Regla de 3 31
Regla de 3 simple directa 31
Regla de 3 simple inversa 32
Regla de 3 compuesta 32
ÁLGEBRA 33
Operaciones básicas con monomios 34
Término algebraico 34
Partes de un término algebraico 34
Expresiones algebraicas 34
Lenguaje común y lenguaje algebraico 35
Tipos de expresiones algebraicas 35
Operaciones con monomios 35
Potenciación de monomios 36
Factorización 36
Relación entre productos notables y factorización 36
Productos notables 37
Factorización 41
Ecuación de primer grado 45
Concepto de ecuación 45
Ecuaciones de primer grado con una incógnita 46
Matrices 47
Definición 47
Orden de una matriz 48
Determinante de una matriz 48
TRIGONOMETRÍA 49

Teorema de Pitágoras 49
Identificar catetos e hipotenusa 50
Resolución de ejercicios con el teorema de Pitágoras 51
Ley de senos y cosenos 52
Identidades Trigonométricas 54
PENSAMIENTO ANALÍTICO 54
Integración de la información 54
Reconocimiento de patrones 55
ESTADÍSTICA 56
Organización de datos 57
Variable estadística 57
Tablas de distribución de frecuencias no agrupada 57
Gráficos estadísticos 59
Medidas de tendencia central 63
Media aritmética o promedio 64
Mediana 64
Moda 64
INGLÉS 67
GRAMÁTICA Y VOCABULARIO 67
Verbo to be 67
Verbo to have 67
There is / There are 68
Artículos A/An 68
Verbo ‘Can’ 68
Pronombres Posesivos 69
Adjetivos Posesivos 70
Presente Simple. Forma Afirmativa 70
Presente Simple. Forma Negativa. 71
Presente Simple. Forma Interrogativa 71
Vocabulary 72
Professions and occupations 72
Family members 73
COMUNICACIÓN 73
Saludos 73
Presentación 74
Información personal 75
Expresiones sociales 75
Direcciones 76
Ordenar comida 77

Pedir y ofrecer ayuda 77
Sugerencias 78
CRÉDITOS 79

PRESENTACIÓN

Apreciable aspirante a ingresar a la Universidad Tecnológica de Gutiérrez Zamora, el material que estás por iniciar a leer fue desarrollado por docentes de la UTGZ, especialistas en las diferentes áreas disciplinares que incluye el contenido temático y fue diseñado de acuerdo al nivel de un egresado de nivel medio superior.

El objetivo de realizar este documento es apoyarte para reafirmar, a través del estudio, el conocimiento que has adquirido a lo largo de tu vida académica, así como también, puedas realizar un ejercicio de autoevaluación sobre los temas que requieren un reforzamiento más a fondo de tu parte.

Las áreas disciplinares y temas que encontrarás en la guía corresponden a los incluidos en el temario de la guía de examen para nuevo ingreso a la UTGZ 2024, por lo que, si no lo has leído, se te recomienda iniciar con ese documento.

Dentro del contenido se abordará de manera explicativa cada uno de los temas del examen, iniciando con el material de estudio de español, posteriormente matemáticas y para finalizar con inglés.

Es importante resaltar que, estos temas son la base para una inserción exitosa a la vida universitaria de cada uno de los aspirantes, por lo cual te invitamos a que revises a profundidad los temas que aún no tienes dominados a plenitud e incluso a buscar apoyo extra en caso que lo consideres conveniente.

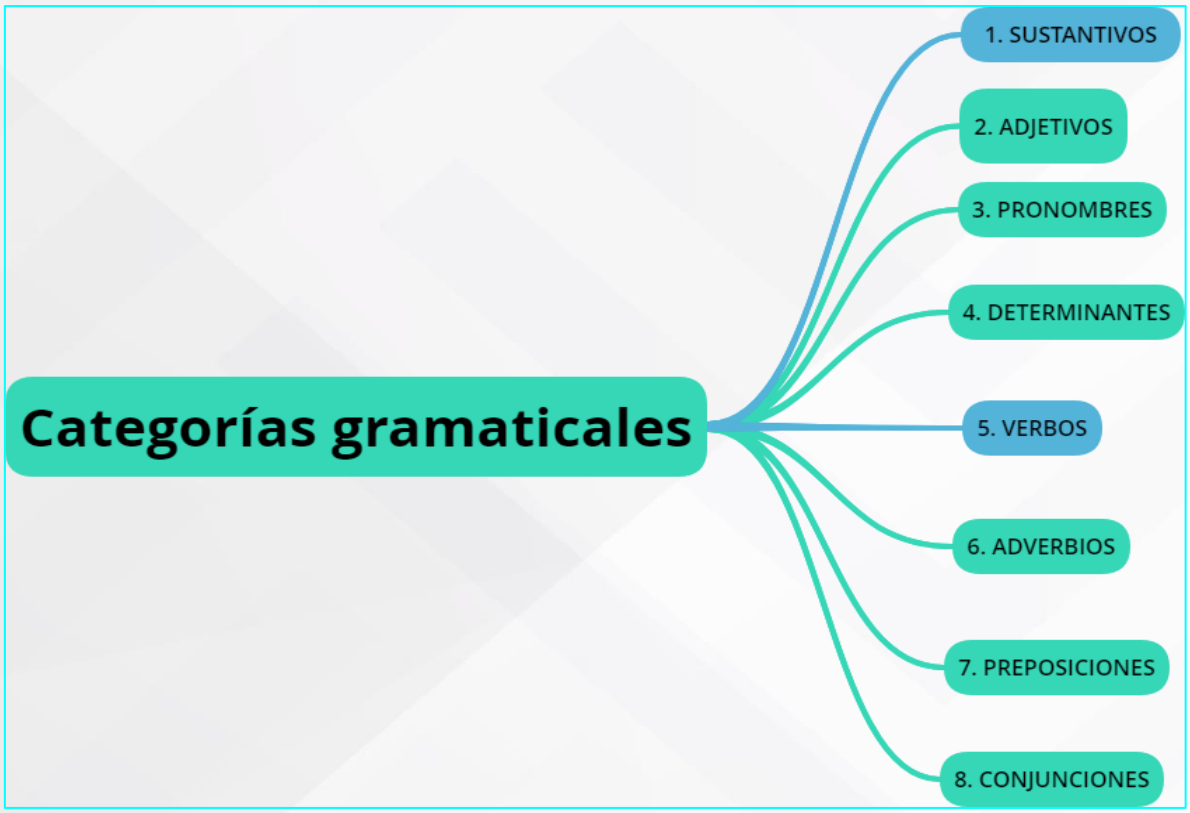
En la UTGZ somos conscientes que puede haber temas más complicados que otros, pero creemos que con esfuerzo, compromiso y dedicación en tu proceso de aprendizaje se puede lograr un resultado satisfactorio en la realización de tu examen.

ESPAÑOL

ÁREA ESTRUCTURA DE LA LENGUA

Categorías gramaticales o tipos de palabras

Es el nombre bajo el que se agrupan todas las palabras del idioma español, distribuidas en 8 clases, estas clases son:



En algunos libros podemos encontrar la categoría gramatical número 9: la interjección, misma que se incluye en este material.

El sustantivo o nombre

Es aquel tipo de palabras cuyo significado determina la realidad. Esto es, los sustantivos nombran todas las cosas: personas, objetos, sensaciones, sentimientos, ideas, etc.

<u>Clases de sustantivos</u>

Clases de sustantivos

<table>
<tr><th>Propios</th><th colspan="2">Comunes</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Son todas aquellas palabras con “propiedad”: los nombres de personas, empresas, organizaciones y lugares.
La principal característica es que se escriben con mayúscula.
Ejemplo: Juan, Pedro, María, Gutiérrez Zamora, Universidad Tecnológica de Gutiérrez Zamora, Organización de las Naciones Unidas.</td><td colspan="2">Son todas aquellas palabras designadas a objetos, animales, plantas, conceptos, sentimientos y emociones. Se dividen en dos.</td></tr>
<tr><th>Abstractos</th><th>Colectivos</th></tr>
<tr><td>Son las palabras que hacen referencia a todo aquello complicado de explicar. Por ejemplo: el amor, la tristeza, el dolor.</td><td>Su nombre bien lo dice, son las palabras que hacen referencia a un colector, por ejemplo: un enjambre (colecta abejas) un rebaño (colecta ovejas).</td></tr>
</table>

Ahora bien, tanto los sustantivos propios como comunes, pueden adquirir la característica de ser contable o incontable, individual y concreto.

Pronombres

Es la palabra que sustituye a otros términos que designan personas o cosas en un momento determinado.

Ejemplo:

Quiero a Laura / **La** (Laura) quiero.

Juan llevaba una visera / **Ésta** (sustituye la palabra visera) era de color verde.

<u>Clases de pronombres:</u>

- Personales: yo, tú, él, nosotros, vosotros/ustedes, ellos.
- Reflexivos: me, te, se, nos, lo, mi, ti, si, le, lo, la.
- Demostrativos: éste/a, ése/a, aquél, esto, eso, aquello, aquella, etc.
- Indefinidos: nada, todo, algo, nadie, alguien, alguno, bastantes, varios, cualquier, cualquiera.
- Numerales: un, dos, tres, primero, segundo...
- Relativos: que, quien, cuyo, cual, cuantos...
- Posesivos: mío, tuyo, suyo, nuestro, vuestro, suyo...
- Interrogativos: qué, quién, cuánto, cuándo, cuál, dónde, cómo...

El adjetivo

Es la palabra que acompaña al nombre para determinarlo o calificarlo: Ej.: el coche rojo / esa casa está lejos.

Los tipos de adjetivos son los siguientes:

- **Adjetivos calificativos**. Indican características del sustantivo al que acompañan, ayudan a resaltar y a destacarlo. Ejemplo: *La niña es RUBIA*.
- **Adjetivos relacionales**. Marcan las relaciones que hay entre el sustantivo, pueden indicar la especificación del nombre. Ejemplo: *La prensa de BARCELONA*.
- **Adjetivos exclamativos e interrogativos**. Acompañan al sujeto en oraciones exclamativas o interrogativas. Ejemplo: *¡Qué guapa eres!, ¿Es guapa?*
- **Adjetivos demostrativos.** Señala a una persona u objeto concreto sobre el que se está hablando. Se suelen emplear adjetivos como ESTE, ESO, etc. Ejemplo: *Pásame ESA mochila*.
- **Adjetivos posesivos**. Son los que indican una relación de pertenencia respecto al sustantivo. Ejemplo: *Esa mochila es MÍA*.
- **Adjetivos numerales.** Indican la cantidad relacionada con el sustantivo al que se refieren. Ejemplo: *Llegó el PRIMERO al examen*.

<u>Grados del adjetivo:</u>

- Positivo: Este es un postre dulce.
- Comparativo: este postre es más dulce que aquel.
- Superlativo: este es un postre muy dulce / dulcísimo.

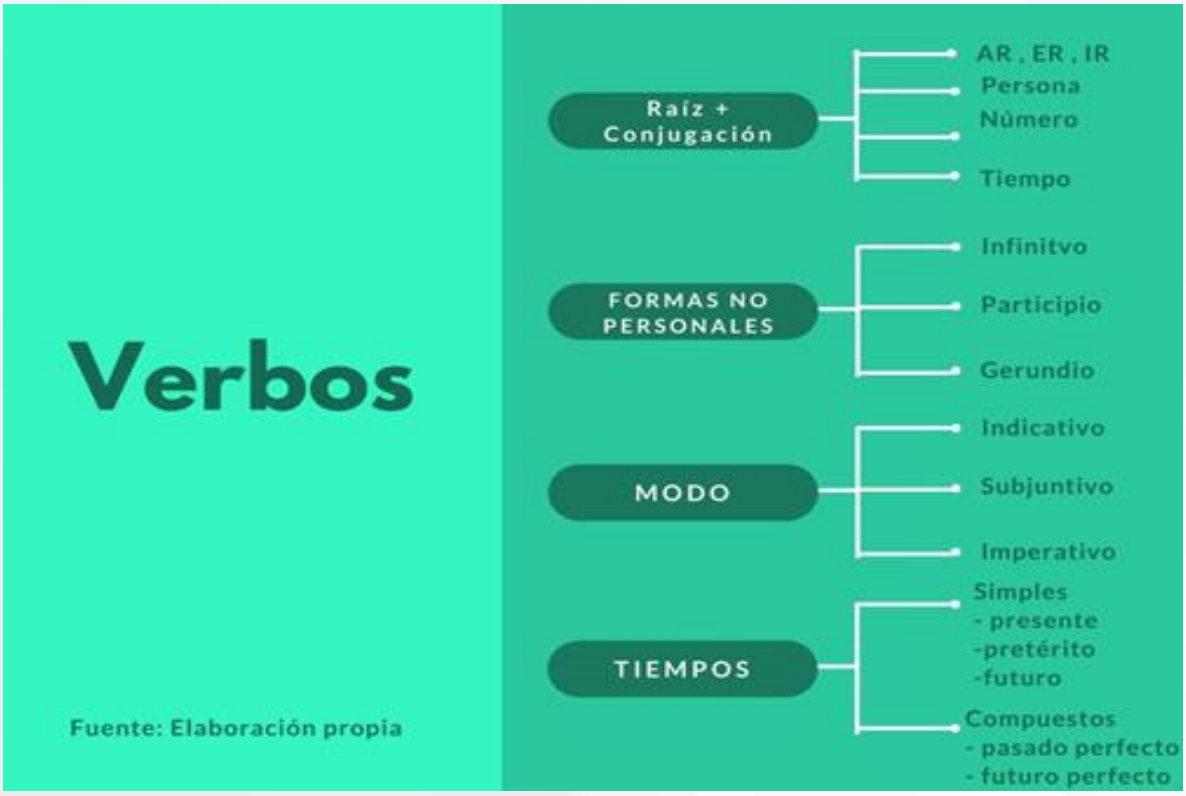
<u>Clases de adjetivos:</u>

- Especificativos: aquellos que indican una cualidad propia del sustantivo. Ej.; el coche rojo
- Explicativos: aquellos que redundan en una cualidad del nombre. Ej.: la nieve blanca

El verbo

Los verbos son la parte de la oración que se conjuga y expresa acción y estado.

Ejemplos: estudiar, vivir, atender, mascar, escuchar, etc.



Nominalizar: Se denomina al procedimiento que consiste en pasar cualquier categoría gramatical a sustantivo. Esto es, los verbos se nominalizan así: oscurecer: oscuro.
Los tiempos verbales se dan en tres **modos**: Indicativo, Subjuntivo e Imperativo.

Los Tiempos son:

1. Simples: Presente, Pretérito imperfecto, Pretérito perfecto simple, Futuro imperfecto, Condicional.

2. Compuestos: Pretérito perfecto compuesto, Pretérito anterior, Futuro perfecto, Pretérito pluscuamperfecto, Condicional perfecto.

Formas no personales: Las formas no personales no presentan desinencia de número y persona. Son el infinitivo: cantar; el gerundio: cantando; y el participio: cantado.

El adverbio

Los adverbios son una parte invariable de la oración que puede modificar, matizar o determinar a un verbo, a otro adverbio o a un adjetivo.
Los adverbios son una parte invariable de la oración que puede modificar, matizar o determinar a un verbo, a otro adverbio o a un adjetivo.

<u>Adverbios de lugar</u>. Aportan información sobre el lugar en el que se desarrolla la acción.
Ejemplo: El parque queda cerca de la tienda.

Adverbios de tiempo. Aportan información sobre el momento en el que se desarrolla la acción. Ejemplo: Antes la gente utilizaba más el periódico.

Adverbios de modo. Aportan información sobre la forma en la que se realiza una acción. Ejemplo: María juega muy bien fútbol.

Adverbios de cantidad. Aportan información cuantitativa sobre algo. Ejemplo: Me gusta mucho este lugar.

Los adverbios epistémicos, son aquellos adverbios que cambian el sentido de la oración o del discurso y que dan información que está relacionada con el emisor. Estos adverbios no dan información sobre las circunstancias del desarrollo de la acción designada por el verbo. Los adverbios epistémicos son:
Adverbios de afirmación. Se utilizan para afirmar, confirmar, sostener o asegurar algo. Ejemplo: Sí, estoy seguro de que lo lograremos.

Adverbios de negación. Se utilizan para negar algo. Ejemplo: La Luna no es cuadrada.

Adverbios de orden. Se utilizan para expresar el orden de una secuencia de hechos o para ordenar el discurso. Ejemplo: Ella entró en la casa y, después, dejó su bolso en el sofá.

Adverbios de duda. Expresan que el hablante no tiene certeza sobre aquello que dice. Ejemplo: Quizá el tren llegue a horario.

Adverbios interrogativos y exclamativos. Se utilizan para introducir preguntas u oraciones exclamativas. Ejemplo: ¡Cuándo dejará de llover!

Adverbios relativos. Se utilizan para introducir oraciones subordinadas. Ejemplo: La casa donde vive Sandra es muy linda.

Adverbios comparativos. Se utilizan para hacer una comparación entre dos cosas. Ejemplo: José toca la guitarra mejor que Pedro.

Adverbios de deseo. Se utilizan para expresar el deseo que tiene el hablante de que se realice una acción. Ejemplo: Ojalá la segunda temporada de la serie se estrene pronto.

Clases de adverbios

Lugar	**Modo**	**Tiempo**	**Duda**	**Cantidad**	**Afirmación**	**Negación**
Lejos	Así	ayer	quizás	mucho	sí	no
Cerca	bien	mañana	tal vez	poco	también	tampoco
Aquí	Mal	nunca	acaso	bastante	además	nunca
Allí		hoy		demasiado	ciertamente	jamás

Allá		jamás				
Acá		siempre				
		a veces				

La preposición
Clase de palabras invariables cuyos elementos se caracterizan por introducir un término, generalmente nominal u oracional, con el que forman grupo sintáctico, no tiene significado propio y que sirve para relacionar términos.

La lista que actualmente recoge la RAE (23 preposiciones):
a, ante, bajo, (cabe), con, contra, de, desde, durante, en, entre, hacia, hasta, mediante, para, por, según, sin, (so), sobre, tras, (versus), (vía).

- Nuevas preposiciones: En los últimos años se han incorporado a la lista las preposiciones: durante, mediante, versus y vía.
- Preposiciones en desuso: Actualmente, las preposiciones 'cabe' (sustituida por la conjunción conjuntiva 'junto a') y 'so', prácticamente no se usan, aunque forman parte de la lengua y deben ser consideradas.

La conjunción
Es una categoría gramatical invariable -parecida a la preposición-, que se utiliza para unir palabras y oraciones.

Clases de conjunciones:

- Copulativas: y, e, ni.
- Disyuntivas: o, u.
- Adversativas: pero, más, si no.
- Concesiva: aunque.
- Causales: porque, pues.
- Condicionales: si.
- Comparativa: tan, tanto, que, como.
- Consecutivas: tanto, que, luego.
- Concesivas: aunque.
- Finales: para.
- Completiva: que, sí.

Locución conjuntiva: se trata de un grupo de palabras que equivalen a una conjunción (uno de sus miembros es una conjunción). Las hay del mismo tipo que las conjunciones.

Ejemplos: sin embargo, de que, ya que, puesto que, con tal que, hasta el punto de que, a fin de que, tanto que, si bien, por más que, para que, etc.

Los determinantes

Siempre aparece delante de un nombre (o una palabra que funcione como tal) para concretar su significado: nos dan información sobre él. Los determinantes pueden ser:

- Artículos: Son determinantes que acompañan al nombre para indicarnos si se trata de un ser conocido o desconocido. Son determinados (el, la, los, las) e indeterminados (un, una, unos, unas).
- Demostrativos: acompañan al nombre para indicar su proximidad o lejanía con relación a la persona que habla. Cerca: este, esta, estos, estas. Distancia media: ese, esa, esos, esas. Lejos: aquel, aquella, aquellos, aquellas.
- Posesivos: acompañan al nombre indicando posesión o pertenencia. Pueden referirse a un solo poseedor (una persona) o a varios poseedores (varias personas). Mío, mía, míos, mías, mi, mis, nuestro/a, nuestros/as, tuyo/a, tuyos/as, tu, tus, vuestro/a, vuestros/as, suyo/a, suyos/as, su, sus.
- Numerales: acompañan al nombre e indican número u orden. Pueden ser cardinales (dos, ocho...) u ordinales (segundo, octavo...)
- Indefinidos: Indican que se desconoce la cantidad exacta de lo nombrado ejemplo: mismo, cada, algún, cualquier, ningún, tanto, mucho, poco, diverso, varios, igual, otro, todo.

Interrogativos y exclamativos: Son aquellos que acompañan al nombre en oraciones interrogativas o exclamativas. Son determinantes interrogativos y exclamativos: Qué, Cuánto/a/os, Cuál, Cuáles.

Las Interjecciones

Las interjecciones no constituyen una parte de la oración en sí, son palabras que sintácticamente, funcionan como oración independiente (invariable) con significado completo y suelen ir entre signos de exclamación, semánticamente expresan sentimientos como asombro, alegría, admiración, saludo o bienvenida, alarma, asco, etc.

Según su origen las interjecciones se clasifican en:

<u>Interjecciones propias o primarias</u>

¡ah!: asombro, sorpresa placer
¡oh!: asombro, admiración
¡ay!: dolor
¡guay!
¡eh!: rechazo, desaprobación, sorpresa
¡hey!: advertencia, saludo
¡uy!: asombro, sorpresa
¡puaj!: asco desagrado
¡hola!: saludo, bienvenida
¡ojalá!: deseo
¿eh?: sorpresa consulta

<u>Interjecciones Impropias</u>: son aquellas que proceden de otras palabras, verbos, adjetivos, nombres, etc.: ¡ojo!, ¡cuidado!, ¡bravo!, ¡magnífico!, ¡oiga!, ¡vaya!, ¡narices!, ¡estupendo!, ¡formidable!, ¡caracoles¡, ¡caramba!, ¡diablos!, ¡recórcholis!, ¡bravo!, ¡hombre!, ¡anda!, ¡dale!

Según su forma, las Interjecciones se clasifican en:
Interjecciones Imitativas: son aquellas que se forman onomatopéyicamente con intención de imitar los sonidos que producen en la realidad: ¡zas!, ¡pum!, ¡chas!, ¡miau!

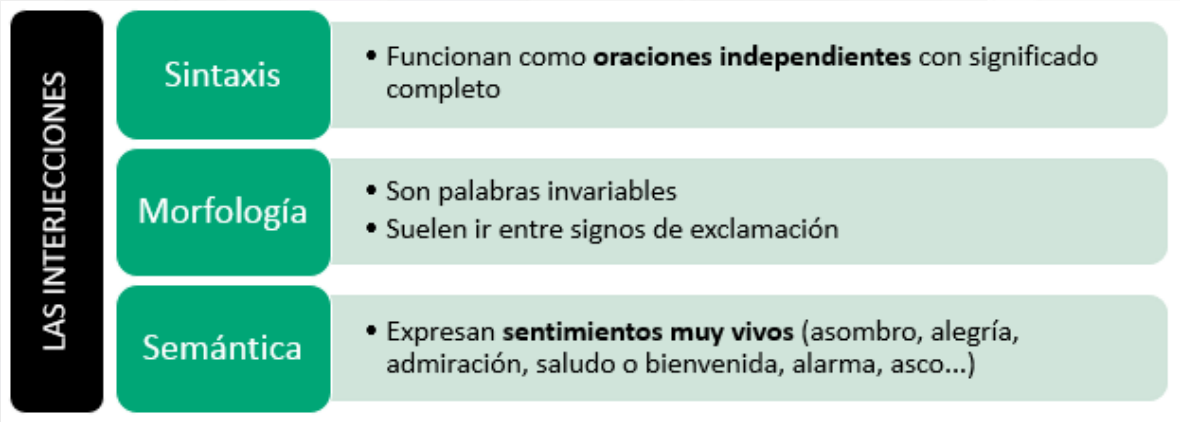
Interjecciones Expresivas: expresan una sensación o emoción del hablante: ¡ah!, ¡uf!,

Interjecciones Apelativas: se usan para iniciar la comunicación, para establecer el contacto con el oyente: ¡Chist! vengan por aquí

Interjecciones Formularias: son aquellas que practican el acto social de saludo o despedida: ¡Hasta pronto!

Interjecciones de Traslación: son aquellas palabras o grupos de palabras que en sí no son interjecciones, pero cuando son utilizados de forma aislada funcionan como tales: ¡hombre!, ¡anda!

Locuciones Interjectivas: Son grupos de palabras que funcionan como interjecciones: ¡Dios mío!, ¡Cielo santo!, ¡Madre mía!, ¡ay de mí!



REGLAS ORTOGRÁFICAS

La **ortografía** quiere decir escribir correctamente, tal y como deberíamos hacerlo cuando hablamos, entonces para escribir correctamente hay que poner atención en la ortografía.

Si bien a través del tiempo el idioma va cambiando por diversas situaciones como: modismos, inclusión y adaptación de vocablos de otros idiomas, etc. no se puede aceptar la escritura con faltas, por esta simple razón, redactar sin faltas de ortografía debería ocupar un lugar importante a la hora de escribir.

Acentuación

El acento prosódico es la mayor intensidad con la que se pronuncia una sílaba dentro de una palabra aislada o un monosílabo dentro de su contexto fónico, por ello se le llama también acento de intensidad, se suele producir, además, una elevación del tono de voz o una mayor duración en la emisión de esa sílaba.

Dentro de una palabra, la sílaba sobre la que recae el acento prosódico o de intensidad es la sílaba tónica; la sílaba o sílabas pronunciadas con menor intensidad son las sílabas

átonas. El acento prosódico puede tener valor distintivo según la sílaba sobre la que recae. Por ejemplo: hábito / habito / habitó.

Para señalar la sílaba tónica de una palabra, el español emplea en ciertos casos el acento gráfico, llamado también tilde (´), signo colocado sobre la vocal de la sílaba tónica de la palabra según reglas bien establecidas. (Reyes C. Q., 2021)

Según el lugar que ocupe la sílaba tónica, se pueden distinguir cuatro clases de palabras:

a) Palabras agudas son las polisílabas cuya última sílaba es tónica. Ejemplos: reloj, balón, canté, catedral, París.

b) Palabras llanas o graves son aquellas cuya penúltima sílaba es tónica. Ejemplos: césped, cabello, estepa, sortijas, inútil.

c) Palabras esdrújulas son aquellas cuya antepenúltima sílaba es tónica. Ejemplos: sábado, helicóptero, cuídate, rápido, esdrújula.

d) Palabras sobresdrújulas son aquellas en las que es tónica alguna de las sílabas anteriores a la antepenúltima. Ejemplos: dígamelo, cómetelo, llévesela.

Tilde diacrítica

La tilde diacrítica es la que permite distinguir palabras que se escriben igual, pero que tienen significados distintos y presentan diferente pronunciación. Así, la palabra «té» no significa lo mismo que «te»: la primera se refiere a una infusión (DRAE), mientras que la segunda es un pronombre personal, se usa con el fin de diferenciar en la escritura ciertas palabras de igual forma, pero distinto significado, que se oponen entre sí por ser una de ellas tónica y la otra átona.

En la siguiente tabla se encuentra una lista abreviada de palabras, con los respectivos ejemplos, en las que se muestra el uso de la tilde diacrítica:

Preposición El carro es de la compañía	**de**	**Dé**	**Verbo dar** Dé estos papeles al encargado
Artículo El asunto no terminó ahí	**el**	**Él**	**Pronombre** Le dijo a él todo lo que sabía
Conjunción, pero Quiero ir, mas (pero) estaré ocupada.	**mas**	**Más**	**Cantidad** Es más fácil de lo que pensé
Posesivo Llevaré a mi mascota al veterinario	**mi**	**Mí**	**Pronombre** La carta es para mí

Pronombre El hombre se lavó las manos y se fue.	**se**	**Sé**	**Verbo saber, ser** No sé si llegaré a tiempo. Sé prudente y llegarás lejos.
Condicional, nota musical Si termino rápido, voy contigo.	**si**	**Sí**	**Afirmativo, pronombre** Creo que sí iré al cine. Se prometió a sí mismo que no lo volvería a hacer.
Pronombre No te demores en llegar	**te**	**Té**	**Sustantivo, bebida. En plural mantiene la tilde: tés** Me recomendaron tomar té jengibre.
Posesivo Vi tu foto en el periódico	**tu**	**Tú**	
Adverbio hasta, incluso, también, ni siquiera. Aun si lo afirmas, no lo creeré.	**aun**	**Aún**	**Adverbio todavía** Aún no ha llegado el correo

<u>Tipo de vocales</u>

Una vocal es aquel sonido del habla en cuya articulación, no está presente ningún obstáculo a la salida de aire. En español son 5 vocales, estas a la vez se dividen en dos grupos:

- Vocal abierta(a-e-o): Se caracteriza por la posición de la lengua dentro de la cavidad bucal, colocándose en la parte inferior de la boca, de manera que la cavidad bucal se amplía para producir el sonido vocálico.

- Vocal cerrada(i-u): Es aquella que no necesita una abertura máxima de la boca, sino que se produce en un mínimo espacio entre la lengua y el paladar, colocando la lengua en la parte superior de la boca.

Ahora bien, las vocales combinadas en sílaba pueden formar: diptongos, triptongos e hiatos.

<u>Diptongos</u>

Conjunto de dos vocales que se pronuncian en una misma sílaba. Para encontrar diptongo debes encontrar alguna de estas situaciones.

a) Vocal abierta + vocal cerrada. Ejemplo: ai-re

b) Vocal cerrada + vocal abierta. Ejemplo: tie-rra

c) Vocal cerrada + vocal cerrada. Ejemplo: ciu-dad

d) Vocal cerrada + vocal abierta acentuada. Ejemplo: cal-ci-fi-ca-ción

Triptongos

Conjunto de tres vocales que se pronuncian en una misma sílaba. Para encontrar triptongo debes encontrar alguna de estas situaciones.

a) Vocal cerrada + vocal abierta + vocal cerrada. Ejemplo: se-miau-to-má-ti-co

b) Vocal cerrada + vocal abierta acentuada + vocal cerrada. Ejemplo: des-pre- ciéis

Hiatos

Es la secuencia de dos vocales que no se pronuncian dentro de una misma sílaba, sino que forman parte de sílabas diferentes. Para encontrar un hiato en una palabra necesitas encontrar alguno de estos casos.

a) Combinación de dos vocales iguales. Ejemplo: Sa-a-ve-dra

b) Vocal abierta + vocal abierta distinta. Ejemplo: te-a-tro

c) Vocal abierta + vocal cerrada acentuada. Ejemplo: re-ú-ne

d) Vocal cerrada acentuada + vocal abierta. Ejemplo: dí-a

Reglas acentuación palabras agudas, graves, esdrújulas y sobresdrújulas.

Para la correcta escritura de las palabras, es necesario saber que estas se dividen en sílabas, recordando que una sílaba es un sonido articulado en una sola emisión de voz; por ejemplo: ma, pa, sa.

Las palabras para su acentuación se dividen en cuatro: agudas o llanas, graves, esdrújulas y sobreesdrújulas.

Palabras agudas:

Las palabras agudas son las que llevan acento (la intensidad de la voz) en la última sílaba. Importante destacar que no todas las palabras agudas llevan acento ortográfico (tilde).

Las palabras agudas llevan tilde si terminan en vocal:
Perú - sofá - café - rubí - menú - marroquí - bebé

Las palabras agudas llevan tilde si terminan en N o S:
también - algún - jamás - según - sillón - además - organización - capitán - alemán - anís - canción

Hay palabras agudas que tienen tilde a pesar de NO terminar en vocal, N o S. Esto es por la ruptura del diptongo: Raúl, baúl, raíz, maíz

Palabras graves o llanas:

Las palabras graves o palabras llanas, son las que llevan la voz en la penúltima sílaba, no todas las palabras graves llevan acento ortográfico. Se acentúan cuando terminan en cualquier letra que no sea n, s o vocal. Ejemplo: mástil

No se acentúan cuando terminan en n, s o vocal. Ejemplo: periodismo

Esdrújulas:
Las palabras esdrújulas son las que llevan la intensidad de la voz en la antepenúltima sílaba. Importante destacar que, en este caso, todas las palabras se acentúan con el acento ortográfico (tilde) siempre.

Ejemplos de palabras esdrújulas:
América - Bélgica - Sudáfrica - música - miércoles - sílaba - máquina - gramática - económico - pájaro - séptimo - cuídate - brújula - gótico - hígado - ejército - características - cállate - dámelo - fósforo - cáscara - cerámica - oxígeno - didáctico - válido

Las palabras esdrújulas también se llaman ***proparoxítonas.***

Palabras sobreesdrújulas
Las palabras sobresdrújulas son las que llevan la intensidad de la voz en la sílaba anterior a la antepenúltima sílaba. Todas llevan tilde.

Estas palabras sobresdrújulas qué llevan tilde generalmente son verbos que van unidos a los complementos indirecto y directo o son adverbios.

Ejemplos de palabra sobreesdrújulas:
cuéntamelo - devuélveselo - éticamente - fácilmente - explícamelo - rápidamente - juégatela - véndemelo - repítemelo - frívolamente - ágilmente

Relaciones semánticas

Toda lengua está formada por palabras, al conjunto de palabras que tiene una lengua se llama léxico y toda palabra tiene un significado, así que al estudio del significado de las palabras se llama **semántica.**

La semántica analiza fenómenos como: los campos semánticos y la denotación y la connotación, los sinónimos, antónimos, homófonos, parónimos, etc.
Los campos semánticos son un conjunto de palabras asociadas porque pertenecen a la misma categoría gramatical y comparten una parte de su significado.

Por ejemplo, las palabras: Mango, sandía, melón, ciruela, etc., pertenecen al campo semántico de las frutas.

Ilustración 1. Campo semántico herramientas

La imagen anterior, representa un campo de la misma familia semántica, en este caso, se proyectan herramientas de trabajo; martillo, pinzas, desarmador, tornillos entre otros.

La siguiente imagen muestra un colectivo de ropa, que, al clasificar semánticamente, se enlista lo siguiente: Falda, pantalón, suéter, blusa etc.

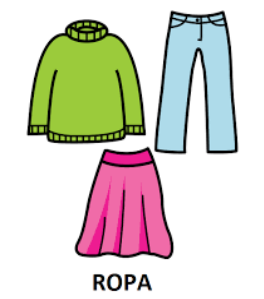


Ilustración 2. Campo semántico ropa

La sinonimia y la antonimia

Los **sinónimos** son palabras cuya característica principal consiste en presentar equivalencias de significado, a través de diferentes significantes. Dicho de otro modo, su significado es semejante.

Si el vocablo es un sustantivo, el sinónimo será sustantivo: discípulos - alumnos; si es adjetivo, será adjetivo: obstinado - pertinaz; y si es verbo, el sinónimo debe ser verbo: guiar - orientar.

Los **antónimos** son pares de palabras cuyo significado es opuesto o contrario entre sí. Al igual que los sinónimos, si existe un sustantivo, su antónimo será un sustantivo: borde - centro, si es adjetivo, será adjetivo: culpable - inocente y si se busca un antónimo de verbo, también deberá ser verbo: culpar - exculpar.

La polisemia y la homonimia

Llamamos polisemia a la relación semántica que se establece en algunas palabras que tienen varios significados; aquellas que tienen un significado únicamente se les llama monosémicas.

Ejemplo: No traje el traje que me pidió el jefe.

La homonimia es considerada como una variante de la polisemia, son aquellos vocablos diferentes en su ortografía, aunque iguales en su pronunciación. Por ejemplo: casa/caza, hasta/asta, vaya/valla.

Lógica textual

La lógica textual es la unidad mínima de comunicación en el texto. El cual es entendido como todo aquello que es susceptible de ser interpretado (de manera escrita, oral, imagen, sonora, etc.)

El sentido de ser de la lengua es la comunicación, por lo que la lengua recurre a textos orales y escritos para comunicar. Para que una manifestación verbal (oral o escrita) pueda ser considerada como texto, deberá tener *textualidad*, deberá cumplir con mínimo

tres condiciones esenciales para ser considerada una unidad comunicativa con significado pleno.

Estas tres condiciones son:

- Adecuación
- Coherencia
- Cohesión

La cohesión y la coherencia son dos propiedades estrechamente ligadas con la comprensión y la producción de textos. Pero es preciso que establezcamos con claridad la distinción entre estos dos conceptos. Para hacerlo, es necesario que sepamos diferenciar también entre forma (expresión) y contenido, entre estructura superficial y estructura profunda, entre oración y proposición.

Para que estas tres condiciones se cumplan al momento de redactar es necesario utilizar correctamente los llamados *conectores lógicos,* en la siguiente tabla encontrarás algunos conectores del discurso:

Conectores lógico-textuales		
Adición	Como su nombre lo indica, son palabras que sirven para vincular ideas y así dotar y clarificar un texto	Y / además / también / más / aún / ahora bien / amén / agregando a lo anterior /por otra parte / así mismo / de igual manera / igualmente / en esa misma línea.
Contraste	Llamados también adversativos, establecen una relación de oposición entre las ideas que se enlazan.	Pero / inversamente / a pesar de / empero / sin embargo / aunque / por el contrario / no obstante / aun cuando / sin obstar / de otra manera / por otro lado / en contraste con / antes bien / en cambio / de otra parte.
Causa/efecto	Estos establecen de causalidad, de origen.	Porque / por consiguiente / por eso / por esta razón / de ahí que / por lo tanto (por tanto) / de modo que / se infiere que / en consecuencia / de esto se sigue / pues / por este motivo / según / entonces / en consecuencia / en conclusión / por ende / ya que.
Tiempo	O temporales, ejercen temporalidad, ya sea previa, posterior o simultáneamente	Después / antes / seguidamente / ahora / entre tanto / en adelante / mientras / posteriormente / entonces / a menudo / simultáneamente / cuando / a medida que / en seguida.
Ejemplificación	Son nexos que sirven para introducir diferentes partes en el discurso con el objeto de aclarar ideas a través de ejemplos. Conocidos también como explicativos.	Por ejemplo / en otras palabras / esto es / es decir / verbigracia / vale decir / dicho de otra manera / con otros términos / sirva esta ilustración / tal como / como caso típico / como muestra / o lo que es lo mismo / así / como / en representación de.
Semejanza	O de comparación. Permiten la introducción de un contraste o un cotejo entre dos o más	Del mismo modo / igualmente / de igual modo / de la misma manera / así mismo / como / así que / de igual manera(forma)(modo).

	referentes. también situaciones.	
Énfasis	O enfáticos, “enfatizan” sobre lo dicho, es decir resaltan algo importante.	Lo que es más / repetimos / sobre todo / ciertamente / en otras palabras / es decir / lo que es peor / como si fuera poco.
Conclusión	Llamados también como conclusivos, sirven para finalizar o introducir una idea dentro del texto o discurso, sintetizan lo dicho.	Finalmente / para resumir / terminando / por último / en conclusión / para finalizar / en suma / para concluir.
Espacial	Son nexos que se utilizan para ubicar espacialmente aquella idea en el discurso. Muchos de estos conectores son adverbios de lugar	Al lado / arriba / abajo / a la derecha / a la izquierda / en el medio / en el fondo.
Condición	Son aquellos que condicionan una idea, una probabilidad entre los términos que se vinculan.	Si / supongamos / puesto que / siempre que, siempre y cuando, a no ser que, sí cuando.
Orden	Llamados también secuenciales, vinculan porciones del mismo texto.	Primeramente / primero / segundo / siguiente / luego / a continuación / finalmente / al principio / al inicio / por último.

ÁREA COMPRENSIÓN LECTORA

La comprensión oral y escrita son habilidades importantes a desarrollar en cualquier lengua y en cualquier nivel educativo, el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE) la define como: la “facultad, capacidad o perspicacia para entender y penetrar las cosas”. En lingüística, se define como la capacidad de entender correctamente textos orales y escritos, lo cual requiere conocer los contextos y los diferentes tipos de textos.

La comprensión lectora es una de las denominadas destrezas lingüísticas, la que se refiere a la interpretación del discurso escrito En ella intervienen, además del componente estrictamente lingüístico, factores cognitivos, perceptivos, de actitud y sociológicos.

Entonces, podemos decir que la comprensión lectora es la capacidad de entender lo leído y requiere de la realización de diferentes procesos cognitivos, por su parte la producción escrita (redacción) es poder expresar de manera escrita lo que se comprende de un texto, en la comprensión lectora hay tres niveles: “Literal” cuando somos capaces de identificar los elementos centrales del texto; “Inferencial” cuando podemos interpretar lo que hemos leído; y “Crítico Valorativo” cuando a partir de la lectura podemos dar nuestra opinión personal o emitir juicios sobre esta ya se de manera oral y/o escrita.

En cuanto a estrategias de lectura, podemos encontrar infinidades y estas surgen también de manera personal, es decir depende del interés y gusto de cada lector la facilidad o complejidad para leer, comprender la información de lo leído.

A continuación, se enlistan algunas estrategias para poder comprender mejor la lectura:

1. Lee las veces que creas necesario, la primera vez, que sea a modo de escaneo de lectura, una segunda para captar ideas, mensajes e informaciones

relevantes, la tercera para comprender la finalidad o las ideas principales antes mencionadas.

2. Usa el conocimiento previo, es decir, trata de predecir con el título de que trata el contenido a leer.
3. Anota las palabras que no conozcan y así disipar dudas para un mejor entendimiento del contexto.
4. Lee en voz alta, te ayudará a mejorar tu dicción y al mismo tiempo es pensar e interpretar información.
5. Resume lo leído, puedes recurrir a la elaboración de un tradicional resumen o bien plasmarla en un organizador gráfico como por ejemplo un mapa conceptual cuadro sinóptico etc.

En la lectura el lector no sólo extrae información, opinión, deleite, etc. del texto, sino que, para su interpretación, también aporta su propia actitud, experiencia, conocimientos previos, etc.

Como punto de partida para la comprensión lectora se plantean estas tres cuestiones: ¿qué leemos?, ¿para qué leemos? y ¿cómo leemos? Existe una clara interrelación entre las tres preguntas: lo que leemos viene determinado por el para qué de la lectura, y ambos condicionan también el cómo.

Veámoslo con un par de ejemplos: Leemos literatura para cultivarnos y deleitar el intelecto; empezamos por la primera página y vamos leyendo página por página, la lectura de una obra completa suele durar horas (si se trata de una novela), a medida que leemos, vamos reflexionando sobre la posible evolución de los personajes.

Leemos un manual de instrucciones de un dispositivo electrónico, para informarnos de sus características y actuar en consecuencia; del índice seleccionamos los apartados que nos interesan y al tiempo que leemos vamos manipulando el aparato y comprobando las funciones básicas, dejamos para otra ocasión las secciones reservadas a usuarios avanzados.

En realidad, antes de empezar a leer, el lector ya ha empezado a formarse una idea sobre el texto, sirviéndose, por una parte, de las características del mismo (tipografía, formato, lugar en que se halla el texto, etc.) y, por otra, de sus conocimientos del mundo, muy en especial, del tema que aborda el texto. Así, por una parte, los esquemas mentales de conocimiento condicionan la percepción y procesamiento de la información contenida en el texto (conceptos, actitudes, valores éticos, etc.) y, por otra, el contenido del texto va remodelando y actualizando dichos esquemas, éstos son algunos tipos de lectura:

1. Lectura globalizada (*skimming*): Una de las estrategias de lectura es el *skimming* llamada en español “barrida del texto”, que consiste en un examen superficial del texto esto es sin leerlo a detalle, con el fin de obtener una idea general del contenido. Es decir, pasar la vista por un texto, conformándose con captar la esencia; generalmente, es así como uno lee el diario.
2. Lectura focalizada (*scanning*): llamada en español “búsqueda de información específica”, buscar uno o varios datos incluidos en un texto, sin atender a la totalidad de la información, p. ej., cuando alguien busca en su agenda el teléfono de un amigo.
3. Lectura extensiva: leer textos largos, buscando una comprensión global, p. ej., cuando se lee una novela.
4. Lectura intensiva: leer textos para extraer información específica, p. ej., cuando se lee el libro de texto.

5. Lectura crítica: leer con el propósito de evaluar el texto, analizando la calidad literaria, la actitud del autor, etc. Un ejemplo sería cuando el profesor lee un ejercicio escrito por los alumnos.

Debes notar que el empleo del “skimming” y/o “scanning” no depende del tipo del texto, sino del propósito del lector, además para saber qué leemos es indispensable conocer los tipos de textos.

Tipos de textos

El texto es la unidad máxima de comunicación y transmite un mensaje completo, es decir, todo texto es un enunciado o conjunto de enunciados con sentido unitario, con una intención comunicativa en un contexto específico y con una determinada organización. El texto suele dividirse en párrafos, que están comprendidos entre una palabra con letra inicial mayúscula, al principio de un renglón y un punto y aparte al final.

Textos argumentativos

Un texto argumentativo es aquel que tiene como fin persuadir al destinatario del punto de vista que se tiene sobre un asunto, o bien convencerlo de la falsedad de una opinión previa (refutación), para lo cual le aporta determinadas razones.
Se caracteriza por una organización del contenido que lo define como tal: se presentan premisas o datos, que no se podrán aceptar si no se admite también una determinada conclusión o tesis.

Todo texto argumentativo, por lo general, se estructura de la siguiente forma:

- Título
- Introducción
- Tesis
- Argumentos
- Conclusión

Textos apelativos

Están dirigidos al receptor y tienen como finalidad provocar una respuesta o reacción en quien recibe el mensaje. Sus intenciones comunicativas son diversas, dependiendo del texto que se trate y su función de la lengua es apelativa porque se espera una respuesta del receptor.

Los instructivos, manuales, normas, cartas, recetas de cocina, recetas médicas, artículos de opinión son apelativos, así como los discursos políticos y la publicidad. Se reconocen por el uso del modo imperativo y de vocativos. También los artículos de opinión tienen una función apelativa.

Textos expositivos

Los artículos de divulgación científica comunican los descubrimientos generados por todas las ramas de la ciencia al público en general. Por eso su intención comunicativa es dar a conocer, informar o explicar y su función es la referencial.

Hay dos tipos de texto informativo:

- Divulgativos: textos que informan sobre un tema de interés. Van dirigidos a un amplio sector de público, pues no exigen un conocimiento previo sobre el tema de la exposición (textos periodísticos, apuntes, libros de texto, enciclopedias, conferencias, textos coleccionables, folletos, entre otros).

- Especializados: textos que tienen un grado de dificultad alto, pues exigen conocimientos previos amplios sobre el tema en cuestión (informes doctorales, magistrales, leyes, artículos de investigación científica, monografías, etc.)

Textos históricos

Monografía

La monografía se refiere al estudio de un tema específico de cualquiera de las diversas áreas del conocimiento. Aborda un asunto que ha sido investigado con cierta sistematicidad; por lo general, es producto de una investigación documental que presenta la información recabada sobre un tema.

La monografía es un tipo de informe y se ajusta a la presentación formal de un informe académico. Generalmente se estructura de la siguiente manera:

- Portada
- Índice
- Introducción
- Desarrollo
- Conclusión
- Bibliografía
- Biografía

Biografía

Nos relata los acontecimientos de una persona desde su nacimiento pasando por su infancia, adolescencia, estudios realizados, su vida profesional, matrimonio, hijos y logros más destacados.

La estructura de la biografía es generalmente cronológica. Es decir, se anotan los acontecimientos desde su nacimiento hasta su muerte.

Textos periodísticos

Noticia

Es considerada como base del género periodístico. Es un texto breve que informa sobre un suceso novedoso, reciente o fuera de lo común. La noticia debe ser de interés social, ya que va dirigida a un gran número de lectores.

Tiene una estructura definida:

1. Titulares. Pueden contener tres llamadas de atención: a la primera se le denomina “balazo”, la segunda es el título y la tercera, el subtítulo. Los titulares recogen lo esencial de la noticia con el fin de atraer la atención de los lectores.
2. El lead, entrada o entradilla, es el primer párrafo del cuerpo de la noticia. Amplía los datos de los titulares y reúne las respuestas a las preguntas básicas.
3. El cuerpo de la noticia nos ayuda a comprender la noticia en su contexto, ya que amplía los detalles y complementa la información del lead.

Crónica

Las crónicas son narraciones de hechos ordenados cronológicamente. La crónica tiene un origen literario, pero se diferencia de esos textos porque el cronista, en el texto periodístico, narra hechos reales que presencia o escucha de fuentes confiables.

Existen varios tipos de crónica. Los más comunes son: deportiva, de guerra, de viajes, de sociedad, taurina, cultural.

Reportaje

Un reportaje es un texto periodístico extenso en el que se desarrolla un tema concreto, producto de un trabajo de investigación. En el reportaje se narran y describen temas variados sobre hechos reales y de interés general. El reportaje puede complementarse con información gráfica y estadística. Entre sus características básicas están: precisión, veracidad y actualidad.

Entrevista
En sus orígenes fue una técnica exclusivamente periodística, actualmente se utiliza como herramienta para recopilar información en todas las ramas del conocimiento. La entrevista, como texto expositivo periodístico, es el resultado de una conversación entre entrevistador y entrevistado que se dará a conocer a la comunidad.

Textos académicos
Reporte de investigación
El reporte de investigación es un texto que describe los resultados de una investigación e incluye información sobre los objetivos y las conclusiones de la misma, así como una descripción del procedimiento, los materiales, equipo utilizado y el tiempo en el que se llevó a cabo la investigación

Textos literarios
Es la producción oral o escrita que centra su atención en las formas estéticas, poéticas y lúdicas del lenguaje, por encima del contenido real, informativo u objetivo que posea el mensaje.

Los textos literarios ofrecen al lector abordajes subjetivos, libres, de contenido reflexivo, vivencial o contemplativo de la vida, sin ánimos de más que suscitar ese conjunto de emociones y de sensaciones en su ánimo.

Para ello estos textos artísticos emplean toda una gama de recursos expresivos, conocidos como tropos, figuras retóricas o figuras literarias, mediante las cuales pueden emplear el lenguaje de manera más potente, más conmovedora o incluso más rítmica.

Un texto literario, presenta las siguientes características:

- Carece de finalidad práctica o utilidad inmediata.
- Emplea el lenguaje de formas poco convencionales, atrevidas o vanguardistas.
- Relata eventos que no tuvieron lugar, o incluso eventos reales, pero desde perspectivas ficcionales, imposibles o novedosas.
- Expresa contenidos subjetivos o filosóficos profundos.
- Posee una extensión determinada y un punto final concreto, inamovible.
- No cambian en el tiempo, sino que son preservados históricamente.

Los textos literarios se clasifican conforme a cuatro géneros, llamados géneros literarios, que los clasifican en base a los métodos que tengan para suscitar en el lector un efecto estético o lúdico, y que son los siguientes:

- Narrativa. Cuando hablamos de narrativa hablamos de cuento breve, novela, microcuento, crónica y otras formas del relato, real o imaginario, fantástico o realista. En ellos se hace énfasis en los personajes, en la trama y sobre todo en la figura del narrador, que es quien cuenta la historia, generando al lector expectativas, tensión y emociones semejantes.
- Poesía. La más libre y compleja de las artes literarias, no tiene prácticamente ningún formato específico que la defina, excepto la idea de describir un estado subjetivo del ser: sentimientos, perspectivas de vida, reflexiones o incluso cierto grado de narración, pero sin personajes definidos, narradores ni trama. Se trata

de la creación de un lenguaje propio, que antiguamente debía tener rimas y versos contabilizados por sílabas, pero esta práctica se considera hoy en día arcaica.

- Dramaturgia. La dramática está destinada a su representación en el teatro, el cine o la televisión. Comprende personajes y escenarios, en situaciones que están ocurriendo delante del espectador mismo.
- Ensayo. Este género consiste en el abordaje reflexivo y explicativo (expositivo y argumentativo) de un tema cualquiera que interese al autor, mediante un ejercicio de exposición que busca ofrecer puntos de vista subjetivos y perspectivas novedosas, en lugar de comprobar científicamente una hipótesis o demostrar alguna teoría.

MATEMÁTICAS

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos.

ARITMÉTICA

El razonamiento aritmético pone a prueba la habilidad de resolver problemas aritméticos básicos que se presentan en la vida diaria. Los problemas de un solo paso o de varios pasos requieren de suma, resta, multiplicación, división y de la elección del orden correcto de las operaciones cuando se necesita más de un paso. Los temas que incluye son operaciones con números enteros, operaciones con números racionales, razón, proporción, interés, porcentaje, y medidas.

Operaciones combinadas sin agrupar

Combinación de sumas y restas

Se resuelven comenzando por la izquierda efectuando las operaciones según aparecen.
Ejemplo:

$$9 - 5 + 7 + 3 - 1 + 8 - 2 = \mathbf{19}$$

Combinación de sumas, restas y productos

Se realizan primero los productos, pues tienen mayor prioridad, a continuación, se resuelven las sumas y restas comenzando por la izquierda.
Ejemplo:

$$\mathbf{2} \times \mathbf{5} - 7 + \mathbf{6} \times \mathbf{3} + 9 - 1 =$$
$$\mathbf{10} - 7 + \mathbf{18} + 9 - 1 = \mathbf{29}$$

Combinación de sumas, restas, productos y cocientes

Se realizan primero los productos y cocientes en el orden que se encuentren, pues tienen la misma prioridad, a continuación, se resuelven las sumas y restas comenzando por la izquierda.
Ejemplo:

$$\mathbf{12/2} + \mathbf{5} \times \mathbf{3} - 4 + 9 - \mathbf{8/4} =$$
$$\mathbf{6} + \mathbf{15} - 4 + 9 - \mathbf{2} = \mathbf{24}$$

Combinación de sumas, restas, productos, cocientes y potencias

Se resuelven primero las potencias por tener mayor prioridad, después desarrollamos los productos y cocientes en el orden que se encuentren, y al finalizar se resuelven las sumas y restas comenzando por la izquierda.

Ejemplo:

$$5 \times 6 + 3^2 - 20/4 - 7 + 2^4 - 8 =$$

$$5 \times 6 + 9 - 20/4 - 7 + 16 - 8 =$$

$$30 + 9 - 5 - 7 + 16 - 8 = \mathbf{35}$$

Operaciones combinadas agrupadas

Cuando se realizan operaciones con números enteros, se debe respetar el orden de prioridad en las operaciones. En el caso de que existan signos de agrupación como paréntesis (), corchetes [] o llaves {}, se debe comenzar operando de adentro hacia afuera, quitando los signos de agrupación al terminar de realizar las operaciones indicadas dentro de ellos. Dentro de un par de paréntesis debe seguirse el orden establecido por las reglas de prioridad de las operaciones.

Cuando los términos son números enteros, hay que tomar en cuenta también las reglas de los signos en todas las operaciones.

Se resuelven primero las operaciones contenidas dentro del paréntesis, después se realizas las operaciones que estén en corchetes, y al final resolver la ecuación respetando las prioridades de los operadores algebraicos.

Ejemplo:

$$[5^2 + (32 - 48/4)] + [(21/3 + 4^3) - (9 \times 8 - 28)]/3^2 + 4 =$$

$$[5^2 + (32 - 12)] + [(7 + 64) - (72 - 28)]/3^2 + 4 =$$

$$[25 + 20] + [71 - 44]/9 + 4 =$$

$$45 + 27/9 + 4 =$$

$$45 + 3 + 4 = \mathbf{52}$$

Fracciones

Concepto de fracción

Se considera como fracción a la representación de las partes de un todo, es decir, se divide en partes iguales y cada parte es la fracción del entero.

Las fracciones están compuestas por un término superior llamado numerador y un término inferior conocido como denominador (el cual debe de ser diferente de cero) separados por una barra oblicua u horizontal.

$$\frac{A}{B} \quad \text{ó} \quad A/B$$

A ⟶ Numerador
B ⟶ Denominador ≠ 0

Tipos de fracciones

- <u>Fracción simple o común</u>**:** Número racional de forma a/b donde ambos son números enteros y b≠0. **Ejemplos:** $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$.

- <u>Fracción propia</u>: Es aquella donde el numerador es menor que el denominador, son fracciones menores a la unidad. **Ejemplos:** $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{8}{9}$.

- <u>Fracción impropia</u>: Es aquella donde el denominador es menor que el numerador, son fracciones mayores a la unidad. **Ejemplos:** $\frac{9}{4}, \frac{7}{2}, \frac{15}{6}$.

- <u>Fracción mixta</u>: Es la representación de una fracción impropia, en forma de número entero y fracción propia. **Ejemplos:** $3\frac{2}{8},\ 2\frac{5}{3},\ 1\frac{2}{4}$.

Operaciones con fracciones

<u>Sumas y restas de fracciones con el mismo denominador</u>

Se resuelven manteniendo el mismo denominador y sumando o restando los numeradores

Ejemplos:

$$\frac{3}{7} + \frac{6}{7} = \frac{3+6}{7} = \frac{9}{7} \qquad \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9-3}{4} = \frac{6}{4}$$

<u>Sumas y restas de fracciones con diferente denominador</u>

Se resuelven multiplicando en cruz los numeradores con los denominadores y sumar o restar (dependiendo de la operación), ambos resultados para obtener el numerador final. Luego se debe multiplicar los denominadores para obtener el denominador final.

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{(3\times 5)+(4\times 2)}{(4\times 5)} = \frac{15+8}{20} = \frac{23}{20}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{8}{9} = \frac{(7\times 9)-(3\times 8)}{(3\times 9)} = \frac{63-24}{27} = \frac{39}{27}$$

<u>Multiplicación de fracciones</u>

Se resuelven multiplicando los numeradores entre sí, y de igual manera sucede con los denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{3}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{(3\times 6)}{(7\times 5)} = \frac{18}{35} \qquad \frac{7}{5} \times \frac{7}{11} = \frac{(7\times 7)}{(5\times 11)} = \frac{49}{55}$$

<u>División de fracciones</u>

Se resuelven Se multiplica la primera fracción por el inverso de la segunda, es decir, se invierte el numerador y denominador de la segunda fracción.

Ejemplo:

$$\frac{3}{7} \div \frac{6}{5} = \frac{(3\times 5)}{(7\times 6)} = \frac{15}{42}$$

Otra forma de realizar la división de fracciones consiste en acomodar una fracción sobre otra y posteriormente multiplicar los números externos para obtener de resultado el numerador, luego debemos multiplicar los números internos para obtener el resultado del denominador.
Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = \left[\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}\right] = \frac{(2 \times 4)}{(3 \times 1)} = \frac{8}{3}$$

Conversión de fracciones impropias a mixtas
Se pueden convertir fracciones impropias a mixtas si se divide el numerador entre el denominador, después se escribe el cociente obtenido como número entero y al final se escribe el número restante encima del denominador.
Ejemplo:

Para convertir $\frac{11}{4}$ en fracción mixta primero se divide 11 ÷ 4 dando como resultado 2 enteros con 3 restantes, por lo que se escribe el 2 y después el resto (3) sobre el denominador (4).

$$\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$$

Conversión de fracciones mixtas a impropias
Se pueden convertir fracciones mixtas a impropias si se multiplica la parte entera por el denominador, después se le suma el numerador y al final se escribe el resultado encima del denominador.
Ejemplo:

$$3\frac{2}{5} = \frac{(3 \times 5) + 2}{5} = \frac{15 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Potenciación de fracciones
Para elevar una fracción a una potencia se eleva tanto el numerador; como el denominador a un mismo exponente; en caso de que se trabaje con una fracción mixta, primero se convertirá a fracción impropia antes de realizar la potenciación.
Ejemplo:

$$\left(3\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{17^2}{5^2} = \frac{289}{25}$$

Potenciación múltiple de fracciones
Para resolver potenciación múltiple de una fracción, se aplica la ley de los exponentes, donde estos se multiplican entre sí antes de realizar la potenciación; en caso de que se trabaje con una fracción mixta, primero se convertirá a fracción impropia antes de realizar la potenciación.
Ejemplo:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{2^6}{3^6} = \frac{64}{729}$$

Radicación de fracciones
Para resolver radicación de fracciones, se realiza hallando la raíz “n” tanto del numerador como del denominador; en caso de que se trabaje con una fracción mixta, primero se convertirá a fracción impropia antes de realizar la potenciación.
Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4} \qquad \sqrt[3]{\frac{64}{343}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{4}{7}$$

Operaciones combinadas agrupadas con fracciones
Se realizan las operaciones que se encuentran dentro de un signo de agrupación, posteriormente éstos se suprimen, como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

Solución: Se efectúan las operaciones que encierran los paréntesis, los resultados se multiplican por las cantidades de fuera y se simplifican para sumarse después y obtener el resultado final.

$$2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\left(\frac{5-2}{4}\right)+3\left(\frac{3-2}{6}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Operaciones empleando jerarquía

Jerarquía de Operaciones

Porcentajes, razones y proporciones

Regla de 3
La regla de 3 simple es una operación que nos ayuda a resolver rápidamente problemas de proporcionalidad, tanto directa como inversa.

Una regla de tres simples necesitamos 3 datos: dos magnitudes proporcionales entre sí, y una tercera magnitud. A partir de estos, averiguaremos el cuarto término de la proporcionalidad.

Regla de 3 simple directa
En casos de proporcionalidad directa (cuando aumenta una magnitud también lo hace la otra).
Colocaremos en una tabla los 3 datos (a los que llamamos “a”, “b” y “c”) y la incógnita, es decir, el dato que queremos averiguar (que llamaremos “x”). Después, aplicaremos la siguiente fórmula:

$$\left.\begin{array}{l} a \rightarrow \quad b \\ c \rightarrow \quad ? \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{b \times c}{a}$$

Ejemplo:
Si 12 discos compactos cuestan $600, ¿cuánto costarán 18?

Entre más discos compren más se eleva el costo, por lo tanto, la proporción es directa. Al ser proporción directa, las razones se escriben y resuelven tal como se aprecia a continuación:

Discos	**Costo**
12	$600
18	x
Proporción Directa	

$$\frac{12}{18} = \frac{600}{x} \text{ entonces } x = \frac{18 \times 600}{12} = 900$$

El costo por 18 discos es de $900

Regla de 3 simple inversa

La regla de tres simples inversas se utiliza cuando el problema trata de dos magnitudes inversamente proporcionales**.** Podemos decir que dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra se divide por el mismo, y viceversa.

Para resolver una regla de tres simples inversos debemos seguir la siguiente fórmula

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow & b \\ c \leftarrow & ? \end{array}$$

$$x = \frac{a \times b}{c}$$

Ejemplo:

Se desea plantar árboles dispuestos en 30 filas, de modo que cada fila tenga 24 de éstos. Si se colocan los mismos árboles en 18 filas, ¿cuántos se tendrán por fila?

Entre menos filas haya, serán más árboles por fila, por lo tanto, la proporción es inversa. Al ser proporción inversa, las razones se escriben y resuelven tal como se aprecia a continuación:

Árboles	**Filas**
24	30
x	18
	Proporción Inversa

$$\frac{24}{x} = \frac{30}{18} \text{ entonces } x = \frac{24 \times 30}{18} = 40$$

Deberán colocar 40 árboles por fila

Regla de 3 compuesta

Se utiliza cuando se tienen más de 4 cantidades directa o inversamente proporcionales. Para poder solucionar este tipo de problemas, primero se debe determinar el tipo de proporcionalidad que se tiene para cada cantidad; después se deberá escribir las

proporciones como fracciones, y en el caso de las cantidades de proporcionalidad inversa, se cambiarán de posición el numerador y denominador. Para finalizar, se calcula el resultado despejando la x.

Ejemplo:
Se calcula que, para construir una barda de 600 metros en 18 días, trabajando 8 horas diarias, se necesitan 12 hombres, ¿cuántos días tardarán 8 hombres trabajando 6 horas diarias para construir una barda de 400 metros?

1. Determinar la proporcionalidad de cada dato
   - A menos hombres tardan más días en construir la barda, por lo tanto, la proporción es inversa.
   - Si trabajan menos horas, tardan más en construir la barda, así que es proporción inversa.
   - Si la barda es menos larga, entonces tardan menos días, por lo cual la proporción es directa

Albañiles	Horas	Longitud	Días
12	8	600	18
8	6	400	x
Proporción Inversa	Proporción Inversa	Proporción Directa	

2. Escribir las proporciones como fracciones, y en el caso de las cantidades de proporcionalidad inversa se cambiarán de posición el numerador y denominador.

$$Albañiles = \frac{8}{12}$$
$$Horas = \frac{6}{8}$$
$$Longitud = \frac{600}{400}$$
$$Días = \frac{18}{x}$$

3. Se colocan las fracciones "completas" en una multiplicación y después del signo de igual se coloca la fracción que tiene la x y se procede a hacer el despeje de x para solucionar el ejemplo.

$$\frac{8}{12} \times \frac{6}{8} \times \frac{600}{400} = \frac{18}{x}$$

$$x = \frac{18 \times 12 \times 8 \times 400}{8 \times 6 \times 600} = 24$$

Por lo tanto, construir una barda de 400 metros con 8 hombres trabajando 6 horas diarias tomaría 24 días.

ÁLGEBRA

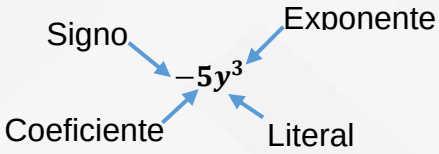
El razonamiento algebraico esencialmente consiste es comunicar un argumento matemático a través de un lenguaje especial, que lo hace más riguroso y general, haciendo uso de variables algebraicas y operaciones definidas entre sí. Una

característica de la matemática es el rigor lógico y la tendencia abstracta usada en sus argumentos.
Para esto es necesario conocer la “gramática” correcta que se debe emplear en esta escritura. Además, el razonamiento algebraico evita ambigüedades en la justificación de un argumento matemático, lo cual es esencial para demostrar cualquier resultado en matemáticas.

Operaciones básicas con monomios

Término algebraico

Un término algebraico es el producto de un factor numérico por una o más variables literales. En cada término algebraico se distinguen el coeficiente numérico (que incluye el signo y constantes matemáticas) y la parte literal (que incluye variables)
Ejemplo:



Partes de un término algebraico

En todo término algebraico pueden distinguirse elementos: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado relativo y absoluto.

- <u>Signo</u>**:** Los términos que van precedidos del signo + se llaman términos positivos, en tanto los términos que van precedidos del signo – se llaman términos negativos.
- <u>Coeficiente</u>**:** El número que se le coloca delante de una cantidad para multiplicarla, en el caso de que una cantidad no vaya precedida de un coeficiente numérico se sobreentiende que el coeficiente es la unidad.
- <u>Parte literal</u>**:** La parte literal está formada por las letras que haya en el término.
- <u>Grado relativo</u>**:** El grado de un término con respecto a una letra es el exponente de dicha letra. Así, por ejemplo, el término $\boldsymbol{x^3y^2z}$, es de tercer grado con respecto a $\boldsymbol{x}$, de segundo grado con respecto a $\boldsymbol{y}$ por último de primer grado con respecto a $\boldsymbol{z}$.
- <u>Grado absoluto</u>**:** Es la suma de todos los exponentes de las variables algebraicas, se obtiene sumando todos los exponentes de las variables. Así, por ejemplo, el término $\boldsymbol{x^3y^2z}$, es de grado absoluto de 6.

Ejemplos:

Ejercicio	**Signo**	**Coeficiente**	**P. Literal**	**Grado Abs.**
$4m^2n^3$	+	4	m^2n^3	5
$-xyz^5$	-	1	xyz^5	7

Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. A cada una de las partes de una expresión algebraica se le conoce como término.

Ejemplo:

$$-5y^3 + 8z - 2x^2$$

Lenguaje común y lenguaje algebraico

- Lenguaje común: Es el lenguaje que utilizamos diariamente.
- Lenguaje Algebraico**:** Es aquel que expresa el lenguaje común en termino de letras (literales) en combinación de números y signos, y trata a dichas letras como números.

Ejemplo:

Lenguaje Común	**Lenguaje Algebraico**
El triple de un número	$3x$
La suma de dos números es 24	$x + y = 24$
Un cuarto de un número	$x/4$
Tres números consecutivos	$x, x+1, x+2$

Tipos de expresiones algebraicas

- Monomio**:** Es una expresión de un solo término: $x^2,\ 5y,\ -8z^3$
- Binomio: Es una expresión de dos términos: $x^2+7,\ 5y-3,\ x-8z^3$
- Trinomio**:** Es una expresión de tres términos: $x^2+y-7,\ 5y-x+3$
- Polinomio**:** Es una expresión que muestra la suma de monomios, también puede ser nombrado cuando se presentan más de tres términos.
- Grado de un polinomio**:** El grado de un polinomio está determinado por el mayor grado de alguno de sus términos cuyo coeficiente es distinto de cero.

Ejemplos:

Expresión	**Grado de la expresión**	**Tipo de expresión**
$5x^3-3x^2$	3	Binomio
$7xy^5+4x^2+z$	5	Trinomio
$z^7-x^{-2}+z-8$	7	Polinomio
$7x^3y^5z^4$	5	Monomio
$x+1$	1	Binomio

Operaciones con monomios

Suma y resta de monomios

Para poder sumar o restar dos o más monomios estos han de ser monomios semejantes, es decir, monomios que tienen la misma parte literal. La suma o resta de monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

Ejemplos:

$$2x^2+3x^2=(2+3)x^2=5x^2$$

$$5y^3+7x^2-2y^3-3x^2=(5-2)y^3+(7-3)x^2=3y^3+4x^2$$

Multiplicación de un número por un monomio

El producto de un número por un monomio es otro monomio semejante cuyo coeficiente es el resultado de multiplicar el coeficiente del monomio por el número.

Ejemplo:

$$5 \times (2x^2yz) = (5 \times 2)x^2yz = 10x^2yz$$

Multiplicación de monomios

La multiplicación de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base y sumando los exponentes.

Ejemplo:

$$(4x^2y^3z) \times (3y^2z) = (4 \times 3)x^2y^{3+2}z^{1+1} = 12x^2y^5z^2$$

División de monomios

La división de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tengan la misma base, es decir, restando los exponentes. Sólo se pueden dividir monomios cuando el grado del dividendo es mayor o igual que el del divisor.

Ejemplos:

$$\frac{30x^4y^3}{6xy^2} = \frac{30}{6}\, x^{4-1}y^{3-2} = 5x^3y$$

$$\frac{2x^5y^2z}{3x^2} = \frac{2}{3}\, x^{5-2}y^2z = \frac{2}{3}\, x^3y^2z$$

Potenciación de monomios

Para realizar la potencia de un monomio se eleva, cada elemento de este, al exponente que indique la potencia, respetando las reglas de los exponentes.

Ejemplos:

$$(4x^2)^2 = (4)^2 \times (x^2)^2 = 16\, x^4$$

$$(-3x^3yz^2)^3 = (-3)^3 \times (x^3)^3 \times (y)^3 \times (z^2)^3 = -27\, x^9y^3z^6$$

Factorización

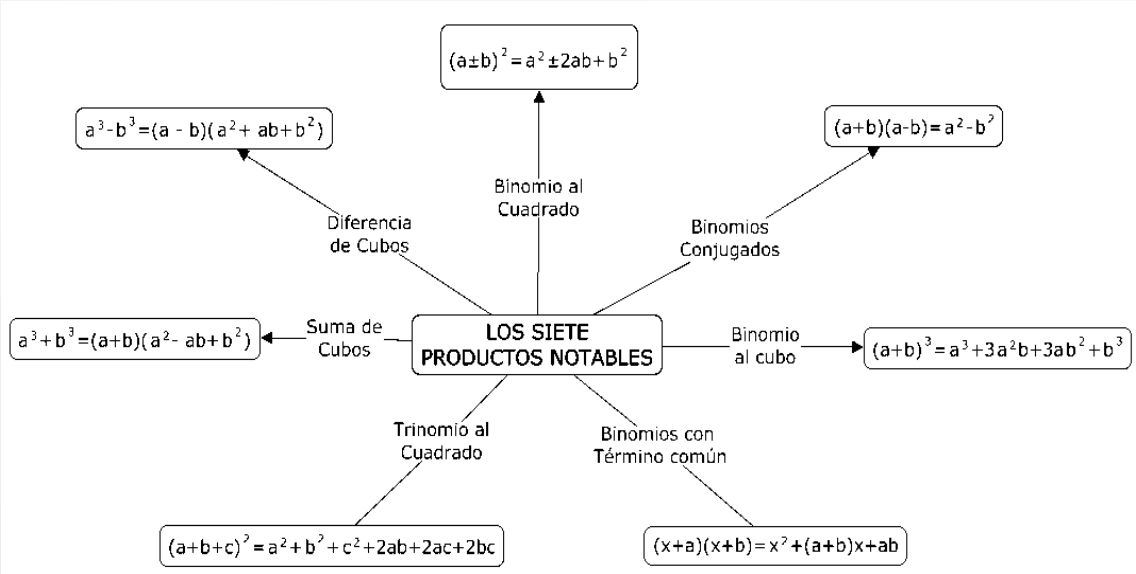
La factorización, como su nombre lo indica es un procedimiento algebraico de “expresar en factores” que se utiliza con mucha frecuencia en diferentes algoritmos, ya sea para reducir expresiones, simplificar fracciones, resolver ecuaciones, así como completar estructuras que permitan determinar elementos de lugares geométricos, también, es sin duda muy útil en la solución de límites, derivadas e integrales.

Relación entre productos notables y factorización

Estos dos temas están íntimamente relacionados de tal manera que no se puede llegar a la factorización sin pasar por los productos notables, siendo este tema el antecedente obligado en cualquier curso de factorización.

Productos notables

Son aquellas expresiones que aparecen con mucha frecuencia en el álgebra, al grado de que se puede definir un "patrón" cuyo procedimiento puede ser sintetizado, obteniendo una multiplicación abreviada, normalmente la identificación del patrón se efectúa mediante la "visualización".



Binomios al cuadrado

a) Caso 1: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

"El cuadrado de la suma de dos cantidades cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de dichas cantidades más el doble de su producto".

b) Caso 2: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

"El cuadrado de la diferencia de dos cantidades cualesquiera es igual a la suma de los cuadrados de dichas cantidades menos el doble de su producto"

Ejemplos:

Resuelve: $(x+2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

$(x)^2$ — Cuadrado del primero

$(2y)^2 = 4y^2$ — Cuadrado del segundo

$2(x)(2y) = 4xy$ — El doble del producto del primero por el segundo:

Resuelve: $(2a^2-3b)^2 = 4a^4 - 12ab^2 + 9b^2$

$(2a^2)^2 = 4a^4$ $\qquad$ $(3b)^2 = 9b^2$

Cuadrado del primero

Cuadrado del segundo

$2(2a^2)(-3b) = -12a^2b$

El doble del producto del primero por el segundo:

Binomios conjugados:

El producto de un par de binomios conjugados, siempre dará como resultado una diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

Resuelve los siguientes productos notables:

a) $(2a-4)(2a+4) = (2a)^2 - (4)^2 = 4a^2 - 16$

b) $(a^3-7b^2)(7b^2+a^3) = (a^3+7b^2)(a^3-7b^2) = a^6 - 49b^4$

c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right) = (x)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{x^2}$

d) $\left(3\sqrt{7x}-2\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{7x}+2\sqrt{y}\right) = \left(3\sqrt{7x}\right)^2 - \left(2\sqrt{y}\right)^2 = 63x - 4y$

e) $(a+b+1)(a+b-1) = [(a+b)+1][(a+b)-1] = (a+b)^2 - 1^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 1$

Binomios al cubo:

El resultado del producto de un binomio elevado a la tercera potencia es:

- Cubo del primer término,
- Triple producto del cuadrado del primer término por el segundo,
- Triple producto del primer término, por el cuadrado del segundo,
- Cubo del segundo término.

Resuelve el siguiente producto notable:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Análisis del resultado:

1. Del producto se obtiene un polinomio de 4 términos, uno más que la potencia a la cual está elevado el binomio.
2. El grado de cada uno de los monomios del resultado es igual a 3.
3. Cada una de las cantidades, *a* y *b*, aparece elevada al cubo.
4. El coeficiente de los dos términos *mixtos* (los que contienen *a* y *b*) es 3.

5. El primer término lleva sus potencias descendentes en cada término hasta llegar a la potencia cero en el último y el segundo término en sentido contrario de igual manera.

Ejemplos:

Resuelve: $(xy+6)^3 = x^3y^3 + 18x^2y^2 + 108xy + 216$

$(xy)^3 = x^3y^3$

$3(xy)^2(6) = 18x^2y^2$

$3(xy)(6)^2 = 108xy$

$(6)^3 = 216$

El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de binomio al cuadrado, cuando es a la tercera potencia es al cubo y así, sucesivamente.

Para potencias superiores se tiene el triángulo de Pascal para deducir los coeficientes,

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Mientras que los exponentes se deducen de las observaciones descritas anteriormente:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a + b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a + b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a + b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a + b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

<u>Binomios con término común</u>

Los binomios con término común siempre mantienen la siguiente forma:

$(x+a)$ y $(x+b)$

Y su producto siempre tendrá la siguiente estructura:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + xb + xa + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

Con lo cual tenemos otro producto notable.

<u>Trinomio al cuadrado</u>

Un trinomio de la forma $(a+b+c)^2$ se puede escribir de la siguiente manera:

$[(a+b)+c]^2$ Resolviendo el binomio al cuadrado se tiene lo siguiente:

$[(a+b)+c]^2 = [(a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2]$ resolviendo el nuevo binomio y los productos se obtiene:

$[(a+b)+c]^2 = [(a+b)^2 + 2(a+b) + c^2] = [a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2]$

Por lo tanto, se tiene que:

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$ Otro producto notable

Ejemplos
Resuelve $(m+n+2)^2$ $(m+n+2)^2 = m^2 + n^2 + 2^2 + 2(mn + 2m + 2n)$ $= m^2 + n^2 + 4 + 2mn + 4m + 4n$ $(3x+y+2)^2 = (3x)^2 + y^2 + 2^2 + 2[(3x)(y) + (3x)(2) + (y)(2)]$ $= 9x^2 + y^2 + 4 + 6xy + 12x + 4y$ $= 9x^2 + y^2 + 6xy + 12x + 4y + 4$

<u>Suma de cubos</u>

La suma de dos cubos se puede descomponer en dos factores, quedando así:

- El producto de la suma de las raíces cúbicas de los términos,
- Multiplica al polinomio cuyos términos son el cuadrado de la raíz cúbica del primer término,
- Menos el producto de las raíces cúbicas,
- Más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.

Considerando la estructura en factores de la siguiente manera:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplos
Resuelve: $x^3y^3 + 27z^3$ Solución: a) Se obtienen las raíces cúbicas de los términos $x^3y^3 + 27z^3$ $\quad \sqrt[3]{x^3y^3} = x^{\frac{3}{3}}y^{\frac{3}{3}} = x^1y^1 = xy$ $\quad \sqrt[3]{27} = 3$ $\quad \sqrt[3]{z^3} = z^{\frac{3}{3}} = z$ $\downarrow \quad \downarrow$ $xy \quad 3z$ b) Se eleva al cuadrado la primera raíz $(xy)^2 = x^{1*2}y^{1*2} = x^2y^2$ c) Se multiplican entre si las raíces $(xy)(3z) = 3xyz$

d) Se eleva al cuadrado la segunda raíz $(3z)^2 = 9z^2$
e) Se arma la estructura en factores:

$$x^3y^3 + 27z^3 = (xy + 3z)(x^2y^2 - 3xyz + 9z^2)$$

Diferencia de cubos:
La diferencia de dos cubos se puede descomponer en dos factores, quedando así:

- El producto de la diferencia de las raíces cúbicas de los términos,
- Multiplica al polinomio cuyos términos son el cuadrado de la raíz cúbica del primer término,
- Más el producto de las raíces cúbicas,
- Más el cuadrado de la raíz cúbica del segundo término.

Considerando la estructura en factores de la siguiente manera:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos

Resuelve: $125x^6 - 8a^3$

Solución:

f) Se obtienen las raíces cúbicas de los términos

$$125x^6 - 8a^3$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\mathbf{5x^2} \qquad \mathbf{2a}$$

g) Se eleva al cuadrado la primera raíz $(5x^2)^2 = 25x^4$
h) Se multiplican entre si las raíces $(5x^2)(2a) = 10ax^2$
i) Se eleva al cuadrado la segunda raíz $(2a)^2 = 4a^2$
j) Se arma la estructura en factores:

$$125x^6 - 8a^3 = (5x^2 - 2a)(25x^4 + 10ax^2 + 4a^2)$$

Factorización
La factorización es un procedimiento o técnica que consiste en la descomposición en factores de una expresión algebraica, dejándola como productos indicados.
Se puede factorizar un número, una suma o resta, una matriz, un polinomio, etc. y siempre con la finalidad de simplificar, estructurar, resolver o lograr un objetivo previamente definido.

La factorización se fundamenta en el reconocimiento de los patrones conocidos como productos notables y los utiliza para lograr los fines operativos que requiera la solución de un problema, está por demás decir que la visualización de esos patrones es un punto muy importante para saber factorizar.

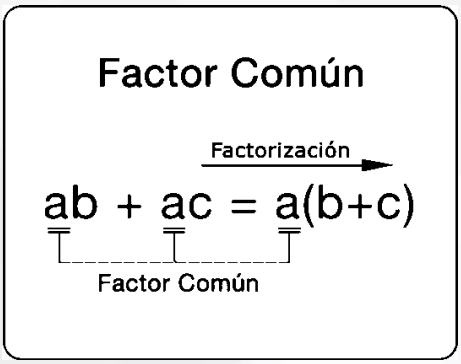
Ejemplos

Factorización de un número: 18 = 2 x 3 x 3 Factorización de una expresión: 2a + 2b = 2 (a + b) Factorización de una suma: 5+5+5+5+5+5 = 6 (5) Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ Factorización de Polinomio: $mn^2 + m^2 + mp^3 + 12m = m(n^2 + m + p^3 + 12)$

<u>Polinomio con un factor común</u>

El factor común de una expresión es el número o literal (o ambos) que están contenidos exactamente en cada uno de los términos de una expresión algebraica. Es decir, que divide exactamente a toda la expresión dando un residuo igual a cero.

El factor común se encuentra con el máximo común divisor (MCD) de los coeficientes de todos los términos del polinomio, el cual será el coeficiente del factor común, cuya parte literal está formada por las literales comunes a todos los términos del polinomio, afectadas de los menores exponentes.



12 + 21= (3)(4) + (3)(7) = (3)(4+7) = (3)(11) = 33

Factorizar un polinomio con un factor común. Es igual al factor común, multiplicado por lo que resulta del polinomio al ser dividido entre dicho factor común.

$$(ax + bx - cx) = x\left(\frac{ax + bx - cx}{x}\right) = x(a + b - c)$$

Ejemplos
Factorizar el polinomio: $12a^3b^2 + 30a^2b^3 =$ $12a^3b^2 + 30a^2b^3 = 6a^2b^2\ (\ 2a + 5b\ )$ $\frac{12a^3b^2}{6a^2b^2} = 2a$ $\frac{30a^2b^3}{6a^2b^2} = 5b$

Factorizar: $25x^4 - 30x^3 + 5x^2$

Solución:

$$\begin{array}{rrr|l} 25 & -30 & -5 & 5 \\ 5 & -6 & -1 & \end{array}$$

Factor Común: M.C.D.= 5 ; menor exponente: x^2

Entonces: $5x^2$

$$25x^4 - 30x^3 + 5x^2 = 5x^2(5x^2 - 6x + 1)$$

Factoriza el polinomio:

$$21m^3n^6 + 28mn^2 - 35m^2n^2 = 7mn^2(3m^2n^4 + 4 - 5m)$$

$$\frac{21m^3n^6}{7mn^2} = 3m^2n^4 \qquad \frac{28mn^2}{7mn^2} = 4 \qquad \frac{35m^2n^2}{7mn^2} = 5m$$

<u>Factorización de una diferencia de cuadrados</u>

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Factorizar una diferencia de cuadrados da como resultado dos binomios conjugados, cuyo término común se encuentra extrayendo la raíz cuadrada del minuendo y los dos términos simétricos se obtienen anteponiendo el signo positivo o negativo a la raíz cuadrada del sustraendo.

Ejemplos
Factorizar: $16x^2 - 9y^2 = (4x+3y)(4x-3y)$ $4x \quad 3y$
Factoriza: $25x^4 - 36y^6 = (5x^2 + 6y^3)(5x^2 - 6y^3)$ $5x^2 \quad 6y^3$

<u>Factorización de un trinomio cuadrado perfecto</u>

El producto resultante de los binomios al cuadrado es un trinomio cuadrado perfecto. Para factorizarlo hay que comprobar si es o no un trinomio cuadrado perfecto para lo cual se debe de cumplir que:

a) El primero término del trinomio y el último sean cuadráticos,

b) El término de en medio sea el doble producto de las raíces de los términos cuadráticos

Factorizar un trinomio cuadrado perfecto es igual a elevar un binomio al cuadrado, dónde los términos del binomio serán las raíces cuadradas de los términos cuadráticos entrelazados con el signo del término del doble producto.

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$$

$$2x \qquad 3$$

$$2(2x)(3) = 12x$$

<u>Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$</u>

Se llama "trinomio con un término común" a una expresión algebraica de la forma $x^2 + bx + c$ que no es un trinomio cuadrado perfecto.

La factorización de trinomios con un término común se analizará en dos partes: para $a = 1$ y para $a \neq 1$.

Ejemplos
Cuando a=1 el trinomio toma la forma: $x^2 + bx + c$ La factorización de un trinomio de este tipo constará de dos factores: $(x + m)$ y $(x + n)$ tales que: $(x + m)(x + n) = x^2 + bx + c$ Donde: $(m + n) = b$ y $(m)(n) = c$ Considerando que, si ***c*** es positivo, las dos cantidades ***m*** y ***n*** tendrán el mismo signo; si ***c*** es negativo, serán de signo contrario, y cuidando que su suma algebraica sea igual a ***b***. $x^2 - x - 56 = (x - 8)(x + 7)$ $x^2 + x - 56 = (x + 8)(x - 7)$ $x^2 - 15x + 56 = (x - 8)(x - 7)$ $x^2 + 15x + 56 = (x + 8)(x + 7)$

<u>Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$</u>

Cuando el trinomio con un término común tiene un valor de $a \neq 1$ es necesario ampliar la técnica para resolverlo de la siguiente manera:

a) Se multiplica a cada término del trinomio por el coeficiente del término cuadrático, dejando los productos indicados.
b) Acomodamos la expresión, tomando dicho coeficiente con su literal como la variable cuadrática, e intercambiándolo en el segundo término también para poner el trinomio en función de dicho factor.
c) Se utiliza el método del caso 1 cuando a=1 para encontrar los factores faltantes.
d) Como se multiplicó al inicio por el coeficiente del término cuadrático, ahora hay que dividir los binomios encontrados entre dicho factor, conviene a su vez descomponerlo en factores a conveniencia para simplificar.

Se expresa el resultado para la expresión original.

Ejemplos
Cuando $a \neq 1$ el trinomio toma la forma: $ax^2 + bx + c$ sigamos el procedimiento descrito anteriormente: Factoriza: $6x^2 - 7x - 3$ a) Multiplicamos la expresión por 6: $= 6(6)x^2 - (6)7x - (6)3$ b) Acomodamos la expresión $= 36x^2 - (6)7x - 18$ $= (6x)^2 - 7(6x) - 18$ c) Resolvemos usando la técnica vista anteriormente: $= (6x)^2 - 7(6x) - 18 = (6x \quad)(6x \quad)$ Buscaremos 2 números que sumados sean igual a -7 y su multiplicación sea igual a -18, encontrándose para esa condición a -9 y +2 $= (6x)^2 - 7(6x) - 18 = (6x - 9)(6x + 2)$ d) Dividimos el resultado entre el coeficiente por el cual se multiplicó al inicio el trinomio, pero expresado a conveniencia en factores que permitan simplificar las fracciones. $= \frac{(6x - 9)(6x + 2)}{(3)(2)} = \frac{(6x - 9)}{(3)} \cdot \frac{(6x + 2)}{2} = (2x - 3)(3x + 1)$

Ecuación de primer grado

Concepto de ecuación

Para poder comprender el concepto de ecuación es necesario conocer la definición de igualdad; una igualdad se presenta cuando dos cantidades son iguales o equivalentes, es decir, cuando tienen el mismo valor. Algunos ejemplos de igualdades son:

$$(2+3)^2 = 25 \qquad (4)^2 + (3)^2 = 25 \qquad \sqrt{625} = 25$$

Por lo tanto, podemos decir que $(2+3)^2$, $(4)^2 + (3)^2$ y $\sqrt{625}$ son expresiones equivalentes pues tienen el mismo valor.

Mientras que una ecuación es una igualdad con una o varias incógnitas que se representan con letras. Uno de los usos más comunes para las ecuaciones es en las fórmulas que se utilizan para encontrar una magnitud. Por ejemplo:

$$v = \frac{d}{t} \qquad A = \pi r^2 \qquad V = l^3$$

Pero también existen ecuaciones con expresiones algebraicas en las que se busca el valor de una variable o representan modelos matemáticos que resuelvan algún problema de la vida real. Por ejemplo:

$$x + 4 = 8 \qquad x + y = 10 \qquad x^2 - 4 = 12 \qquad \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{5}{x+2}$$

Dichas ecuaciones están formadas de la siguiente manera:

1er miembro = 2do miembro

Se llama *solución de una ecuación* al valor o los valores numéricos que hacen que la igualdad, entre el 1.er y 2.do miembro se cumpla. Por ejemplo:

- $x + 4 = 8$, tiene una única solución $x = 4$, ya que al sustituir la x por el número 4, obtenemos que $4 + 4 = 8$.
- $x + y = 10$, tiene múltiples soluciones siendo algunas de ellas, $x = 0 \quad y = 10$, $x = 1 \quad y = 9$, $x = -4 \quad y = 14$, etcétera, ya que al sumar ambas cantidades suman 10.
- $x^2 - 4 = 12$, tiene dos posibles soluciones; la primera de ellas $x = 4$, pues al sustituir el valor $(4)^2 - 4 = 12$, obtenemos $16 - 4 = 12$; y la segunda solución es $x = -4$, porque al sustituir el valor $(-4)^2 - 4 = 12$, nuevamente obtenemos $16 - 4 = 12$.

El grado de una ecuación se obtiene del término de mayor grado que contenga a la(s) incógnita(s). Por ejemplo:

- $x + 4 = 8$, es de primer grado, porque la incógnita tiene exponente 1.
- $x + y = 10$, es de primer grado, porque ambas incógnitas tienen exponente 1.
- $x^2 - 4 = 12$, es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ecuaciones que se resuelven mediante la aplicación de ecuaciones equivalentes con operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) a ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la incógnita.

Ejemplos
Encuentra el valor de x en la siguiente ecuación: $2x + 3 = 7$ Solución: $(2x+3) - 3 = 7 - 3$ — Se resta 3 en ambos miembros $2x = 4$ — Al simplificar $\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(4)$ — Se multiplica por $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}x = \frac{4}{2}$ $x = 2$
¿Cuál es las solución de la ecuación $20x - 14 - 11x = 8 - 6x + 2$? Solución $20x - 14 - 11x + 14 = 8 - 6x + 2 + 14$ — Se suma 14 en ambos miembros $20x - 11x = 8 - 6x + 24$ — Al simplificar $20x - 11x + 6x = 8 - 6x + 24 + 6x$ — Se suma $6x$ en ambos miembros $15x = 24$ — Al simplificar $15x\left(\frac{1}{15}\right) = 24\left(\frac{1}{15}\right)$ — Se multiplica por $\frac{1}{15}$ $x = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$
Encuentra el valor de z en la siguiente ecuación: $8 - z = 9$ Solución:

$8 - z - 8 = 9 - 8$	Se resta 8 en ambos miembros
$-z = 1$	Al simplificar
$-z(-1) = 1(-1)$	Se multiplica -1 en ambos miembros
$z = -1$	

Resuelve la ecuación $8x - (6x - 9) + (3x + 2) = 4 - (7x - 8)$

Solución

$8x - 6x + 9 + 3x + 2 = 4 - 7x + 8$	Se eliminan los signos de agrupación
$8x - 6x + 3x + 11 = -7x + 12$	Sumamos o restamos los valores numéricos
$8x - 6x + 3x + 11 - 11 = -7x + 12 - 11$	Se resta 11 en ambos miembros
$8x - 6x + 3x = -7x + 1$	Al simplificar
$8x - 6x + 3x + 7x = -7x + 1 + 7x$	Se suma $7x$ en ambos miembros
$8x - 6x + 3x + 7x = 1$	Al simplificar
$12x = 1$	Se realizan las operaciones de la incógnita
$12x\left(\frac{1}{12}\right) = 1\left(\frac{1}{12}\right)$	Se multiplica $\frac{1}{12}$ en ambos miembros

Matrices

Definición

Una matriz es un arreglo rectangular de números de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los números a_{11}, a_{12}, a_{13},...,a_{ij} reciben el nombre de elementos de la matriz. Para simplificar la notación, la matriz se expresa: $A = (a_{ij})$. El primer subíndice de cada elemento indica el renglón, y el segundo la columna de la matriz donde se encuentra el elemento.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & & C_n \end{array} \\ a_{31} \rightarrow \text{Columna} \rightarrow & & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \\ R_m \end{array} \\ \downarrow & & & & \\ \text{Renglón} & & & & \end{array}$$

Dónde: R_1, R_2, …, R_n son renglones y C_1, C_2, …, C_n son columnas.

Ejemplo:

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -7 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a_{21}, a_{22}, a_{33} y a_{43}

Solución
a_{21}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 1, es decir, $a_{21} = -3$
a_{22}: es el valor que se encuentra en el renglón 2, columna 2, es decir, $a_{22} = 4$
a_{33}: es el valor que se encuentra en el renglón 3, columna 3, es decir, $a_{33} = -7$
a_{43}: es el valor que se encuentra en el renglón 4, columna 3, es decir, $a_{43} = 1$

Orden de una matriz
El tamaño de una matriz de m renglones y n columnas se conoce como orden y se denota por $m \times n$.

Ejemplos

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$
Orden $= 1 \times 3$	Orden $= 3 \times 1$	Orden $= 2 \times 2$	Orden $= 2 \times 3$

Determinante de una matriz
El determinante de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n, es un número escalar que se relaciona con la matriz, mediante una regla de operación. Denotada por $det\boldsymbol{A} = |A|$

Si la matriz es de 2×2:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El determinante de $\boldsymbol{A}$ está dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(−)
(+)

Por tanto,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo
Evalúa el determinante de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ Solución: Cada elemento de la matriz se sustituye en la fórmula y se realizan las operaciones. $det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (4)(5) - (-2)(1) = 20 + 2 = 22$ Por lo que el $det\boldsymbol{A} = 22$

En el caso de matrices 3×3, como la que se observa a continuación:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se escribe el determinante de 3×3, para resolverlo se repiten los dos primeros renglones y se multiplican las entradas en diagonal como se indica:

$$det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$

Por tanto, el determinante es:

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} + a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13})$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}$$

Ejemplo
Evalúa el determinante de la matriz: $$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$ Solución: Se forma el siguiente arreglo: se aumentan los dos primeros renglones del determinante, como se indica, después se procede a sustituir los términos en la fórmula y se realizan las operaciones indicadas en la fórmula. $$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-) \\ (-) \\ (-) \\ (+) \\ (+) \\ (+) \end{matrix}$$ Por consiguiente, el determinante es: $$det\boldsymbol{B} = (2)(3)(6) + (-2)(1)(0) + (-5)(-1)(4) - (-2)(-1)(6) - (2)(1)(4) - (-5)(3)(0)$$ $$det\boldsymbol{B} = 36 + 0 + 20 - 12 - 8 - 0 = 36$$ Por lo que el $det\boldsymbol{B} = 36$

TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es la ciencia encargada de estudiar la relación que hay entre los ángulos y los lados de los triángulos, para la solución de esta clase de situaciones es necesario aplicar las razones trigonométricas, las cuales nos permiten obtener las líneas trigonométricas para cada una de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. (García Gaona, 2016)

Teorema de Pitágoras

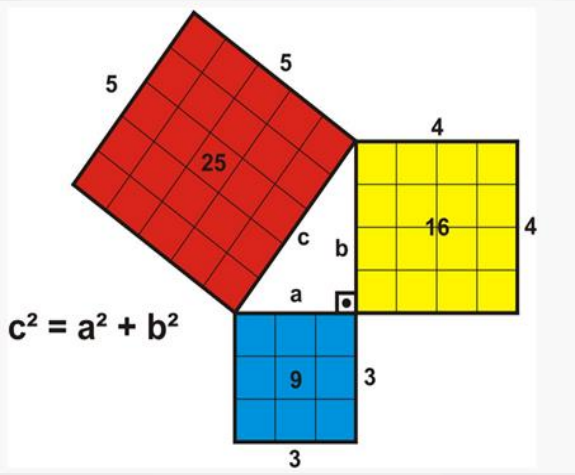
Hace mucho tiempo, un matemático griego llamado Pitágoras descubrió una propiedad interesante de los triángulos rectángulos el cual fue nombrado teorema de Pitágoras en su honor. El Teorema de Pitágoras fue uno de los primeros teoremas conocidos por las civilizaciones antiguas y es sin lugar a duda uno de los más conocidos de la historia de

la matemática; además, es el que cuenta con el mayor número de demostraciones realizadas por numerosos filósofos y matemáticos.

Durante la Edad Media, un conocimiento profundo del mismo y el desarrollo de una nueva y original demostración, eran requisitos fundamentales para alcanzar el título de Magister matheseos (“Maestro de matemáticas”). Por lo tanto, algunos historiadores señalan que existen más de mil formas diferentes de demostrar este teorema.

A esta propiedad que tiene muchas aplicaciones en la ciencia, el arte, la ingeniería y la arquitectura se le conoce como Teorema de Pitágoras.

El Teorema de Pitágoras es un teorema que nos permite relacionar los tres lados de un triángulo rectángulo, por lo que es de enorme utilidad cuando conocemos dos de ellos y queremos saber el valor del tercero.



El teorema se enuncia de la siguiente manera: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

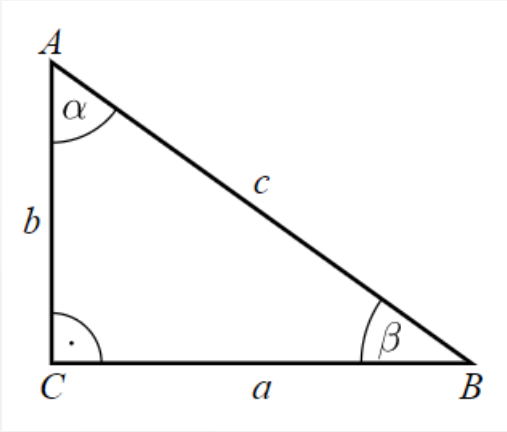
En los triángulos rectángulos se distinguen unos lados de otros. Así, al lado mayor de los tres y opuesto al ángulo de 90 grados se le llama hipotenusa, y a los otros dos lados catetos.

Si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c es la longitud de la hipotenusa, entonces se cumple la siguiente relación: $c^2 = a^2 + b^2$

NOTA: Como se menciona en el párrafo superior, el teorema de Pitágoras solo aplica para triángulos rectángulos (es decir, aquellos que tienen un ángulo de 90°)

Identificar catetos e hipotenusa

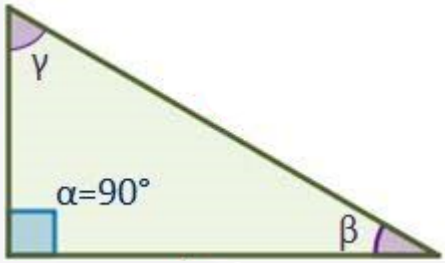
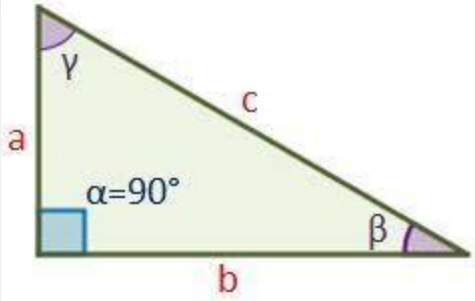
Uno de los principales problemas que enfrentan los alumnos al usar el teorema de Pitágoras es identificar cual lado del triángulo es el cateto adyacente, cual el cateto opuesto y cuál la hipotenusa. Para ello es necesario identificar los ángulos.



- Hipotenusa (c): Es el lado que está frente al ángulo de 90°.

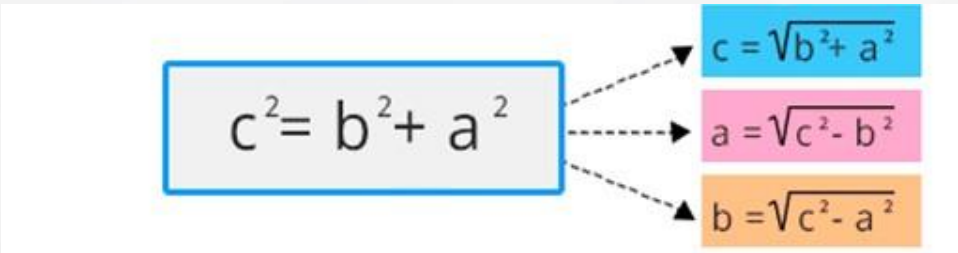
- Cateto adyacente (a): Depende del ángulo (diferente de 90°) que consideremos para analizar el triángulo, en la imagen del ejemplo usamos el ángulo β que se forma por la hipotenusa y otro de los lados, ese otro lado será el cateto adyacente.

- Cateto opuesto (b): Es el lado que está frente al ángulo de referencia, para la imagen del ejemplo, el lado que está frente al ángulo β.

Ejemplo
Observe la imagen, determine cual lado es la hipotenusa (c), el cateto adyacente (a) y el cateto opuesto (b) si el ángulo de referencia es γ 
Solución: Cómo se mencionó anteriormente, el lado que está frente al ángulo de 90° será la hipotenusa. Después el lado que está frente al ángulo de referencia γ, será el cateto opuesto (b), y por consiguiente el lado restante será el cateto adyacente (a). 

Resolución de ejercicios con el teorema de Pitágoras

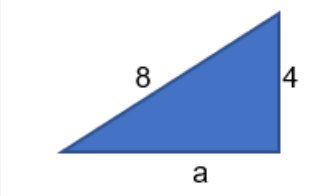
Para poder resolver los ejercicios, primero debe conocer la fórmula del teorema de Pitágoras. Si bien, hay solo una fórmula, al realizar despejes se consiguen 3 variantes de la misma, como se muestra a continuación:



El procedimiento para poder resolver de manera exitosa los ejercicios es:

1. Definir si debemos calcular la hipotenusa o algún cateto.
2. Sustituir valores en la fórmula adecuada.

3. Resolver las operaciones.

Ejemplos
Determine el valor del lado “a” 
Solución: 1. Definir si se trata de la hipotenusa o algún cateto. En este caso se trata de un cateto, pues el lado frente al ángulo de 90° mide 8. 2. Sustituir valores en la fórmula adecuada. La fórmula adecuada es: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $a = \sqrt{8^2 - 4^2}$ 3. Resolver las operaciones $a = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 6.9$
Determine el valor del lado faltante en el siguiente triángulo:
Solución: 1. Definir si se trata de la hipotenusa o algún cateto. En este caso se trata de la hipotenusa, pues es el lado frente al ángulo de 90°. 2. Sustituir valores en la fórmula adecuada. La fórmula adecuada es: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $c = \sqrt{7^2 + 3^2}$ 3. Resolver las operaciones $c = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} = 7.61$

Ley de senos y cosenos

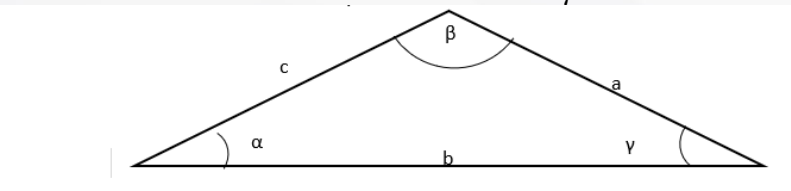
La ley de seno es una relación de tres igualdades que siempre se cumplen entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera. (Márquez, Matemáticas Simplificadas, 2009)

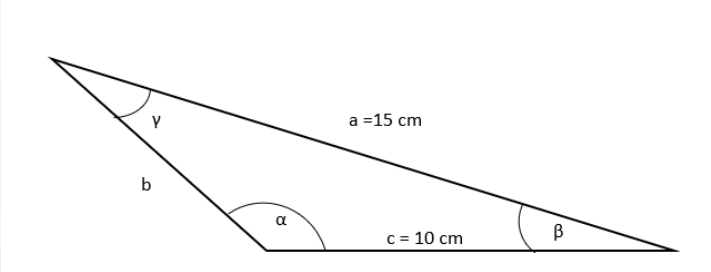
La ley del seno nos dice que la razón entre la longitud de cada lado y el seno del ángulo opuesto a él en todo triángulo es constante.

$$\frac{a}{sen\ a} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma} \qquad \frac{a}{b} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta}, \frac{b}{c} = \frac{sen\ \beta}{sen\ \gamma}, \frac{c}{a} = \frac{sen\ \gamma}{sen\ \alpha}$$

La ley de los cosenos para el cálculo de uno de los lados de un triángulo cuando se conoce el ángulo opuesto y los otros dos lados.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ cos\ \alpha \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ cos\ \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ cos\ \gamma$$



Ejemplo
Determina la longitud del lado b y los ángulos β y γ para el siguiente triangulo, considerando que $\alpha = 130°$ 
Solución: Datos: a=15 cm b=? c=10 cm $\alpha = 130°$ $\beta =?$ $\gamma =?$ Como tenemos 2 lados y un ángulo podemos utilizar la ley de senos, por lo tanto: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$ Sustituye los valores conocidos $$\frac{15}{\sin 130°} = \frac{10}{\sin\beta}$$ Despejamos β $$15\sin\beta = 10\sin 130°$$ $$sin\ \beta = \frac{10\sin 130°}{15}$$ $$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{10\sin 130°}{15}\right)$$ Resolviendo $$\beta \approx 30.7°$$ Por último, el ángulo γ lo calculamos sabiendo que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, entonces si ya tenemos α y β, despejamos γ $$\gamma = 180° - \alpha - \beta$$ Sustituyendo: $$\gamma = 180° - 130° - 30.7°$$ $$\gamma = 19.3\ °$$

Identidades Trigonométricas

Las funciones trigonométricas son razones trigonométricas, es decir la división entre dos lados de un triángulo rectángulo respecto a sus ángulos, estas funciones surgieron al estudiar el triángulo rectángulo y observar que los cocientes entre las longitudes de dos de sus lados sólo dependen del valor de los ángulos del triángulo.

- La hipotenusa (c) es el lado opuesto al ángulo recto, o el lado más grande.
- El cateto opuesto (a) es el lado opuesto al ángulo α.
- El cateto adyacente (b) es el lado adyacente al ángulo α.

Existen tres funciones trigonométricas fundamentales: seno, coseno y tangente y tres funciones trigonométricas recíprocas: cosecante, secante y cotangente.

Funciones Trigonométricas	
Fundamentales	Recíprocas
$sen = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$csc = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$
$cos = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$sec = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$
$tan = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	$cot = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

PENSAMIENTO ANALÍTICO

El pensamiento analítico está relacionado con la habilidad de trabajar y pensar en términos de números, palabras y figuras, teniendo la capacidad de emplear el razonamiento lógico. El desarrollo de este pensamiento, es clave para el impulso de la inteligencia matemática, la cual va mucho más allá de las capacidades numéricas, aportando importantes beneficios como la capacidad de entender conceptos y establecer relaciones basadas en la lógica de forma esquemática y técnica. Implica la capacidad de utilizar de manera casi natural el cálculo, las cuantificaciones, proposiciones o hipótesis. Todos nacemos con la capacidad de desarrollar este tipo de inteligencia.

Integración de la información

Este apartado corresponde al desarrollo de conclusiones a partir un conjunto de textos o proposiciones dadas para identificar después de su análisis cuales enunciados son erróneos o verdaderos.

Recomendaciones:

- Siempre, antes de leer las opciones lea los enunciados prestando total atención a cada uno de ellos para que tengas una idea general de estos.
- La mejor manera de hallar la respuesta correcta es descartando las respuestas incorrectas (Proposiciones erróneas).
- Si después de la primera lectura no logras descartar las proposiciones erróneas vuelve a leer el texto y obtén una nueva idea.

Ejemplos
Selecciona las proposiciones que incluyan solamente opiniones personales. a. El recibo de la luz es $700.00 bimestrales

b. Pague mucho de luz y la malgastan, no es justo
c. El huracán registró vientos de 215 km/h
d. Ayer mi hermano cumplió 12 años

Solución:
El enunciado indica que seleccionemos solamente opiniones personales, por lo que los incisos a, c y d no serían la respuesta correcta ya que representan datos establecidos o funciones concretas, mientras que el inciso **b** sería el correcto, ya que en este se presenta una opinión personal específica de una persona.

De acuerdo con las siguientes afirmaciones seleccione la respuesta correcta.

- Las avispas son insectos
- Todas las avispas pican

a. Si un insecto me picó, entonces es una avispa
b. Las avispas son insectos, entonces todos los insectos pican
c. Algunos insectos pican, entonces algunas avispas pican
d. Este insecto es una avispa, entonces este insecto pica

Solución:
Tomando en cuenta las 2 afirmaciones descritas al inicio, podemos ir descartando las respuestas incorrectas; el inciso a dice que cualquier insecto que te pique será una avispa, lo cual no es correcto, el inciso b afirma que todos los insectos sin importar cuales sean pican, lo cual es incorrecto, el inciso c dice que solo algunas avispas pican, lo cual no es correcto pues contradice la segunda afirmación, por lo que la respuesta correcta es el inciso **d**, pues cumple con ambas afirmaciones descritas al inicio.

Escritor es a libro como pintor es a

a. Pintura
b. Brocha
c. Acuarela
d. Pincel

Solución:
En este caso, la frase inicial nos da 2 palabras (Escritor y libro) podemos observar que la relación que existe entre estas es que el Escritor escribe un libro, por lo tanto, un pintor pintará una pintura, por lo que la respuesta correcta es el inciso **a**.

Reconocimiento de patrones

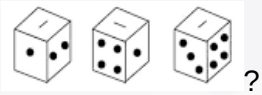
También llamado lectura de patrones, identificación de figuras y reconocimiento de formas, consiste en el reconocimiento de patrones o sucesiones específicas. Los patrones se obtienen a partir de los procesos de observación, extracción de características y descripción de cada una de ellas, dando como resultado el reconocimiento de la figura o número que sigue en secuencia correcta.

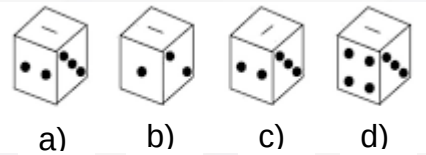
Ejemplos

¿Qué número sigue en esta secuencia numérica: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, __?

a. 18
b. 20
c. 21
d. 23

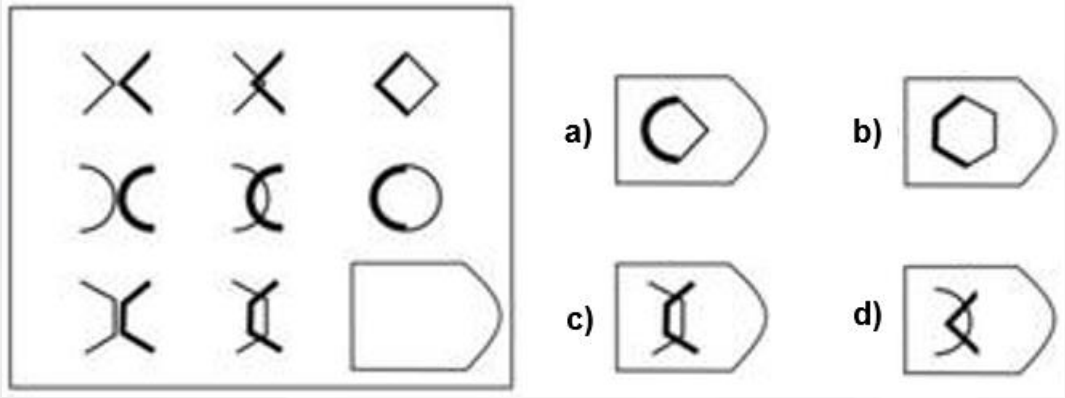
Solución:
En este caso, el patrón que se presenta es que se suman el número que tengamos más el número anterior, dando el número que sigue, por ejemplo: 5+3=8, por lo que, si tomamos el número final 13 y le sumamos el número anterior 8, nos daría como resultado 13+8=21, número representado en el inciso **c**.

¿Qué figura sigue en la siguiente secuencia de dados  ?



Solución:
Al observar la secuencia inicial vemos 2 características importantes, la primera es que el dado gira hacia la izquierda cada vez, por lo que la cara derecha del último dado deberá de marcar un 3, eliminando así el inciso b, así mismo, en la parte de arriba la línea también gira, teniendo que quedar en horizontal diagonal, con lo que eliminamos el inciso c, para finalizar, la cara que tiene el número 4 deberá quedar atrás en el último dado, eliminando el inciso d, quedando como respuesta el dado del inciso **a**.

¿Qué figura sigue en la siguiente secuencia de figuras?



Solución:
El patrón de las figuras anteriores es por fila, observándose en la primera fila que 2 vértices se juntan para formar un rombo, en la segunda fila dos medias circunferencias se juntan para formar un círculo completo, y en la tercera fila 2 mitades de hexágono se juntan para formar un hexágono completo marcado por el inciso **b** como respuesta correcta.

ESTADÍSTICA

Estadística es la ciencia que se encarga de recopilar, organizar, procesar, analizar e interpretar datos con el fin de deducir las características de una población objetivo, además que nos permite realizar predicciones con modelos matemáticos con un bajo nivel de error.

Organización de datos

Al ordenar datos muy numerosos, es usual agruparlos en clases o categorías. Al determinar cuántos pertenecen a cada clase, establecemos la frecuencia. Construimos así una tabla de datos llamada tabla de frecuencias.

Variable estadística

Una **variable estadística** es el conjunto de valores que puede tomar cierta característica de la población sobre la que se realiza el estudio estadístico y sobre la que es posible su medición. Estas variables pueden ser: la edad, el peso, las notas de un examen, los ingresos mensuales, las horas de sueño de un paciente en una semana, el precio medio del alquiler en las viviendas de un barrio de una ciudad, etc.

Las variables estadísticas se pueden clasificar por diferentes criterios. Según su medición existen dos tipos de variables:

- **Cualitativa** (o categórica): son las variables que pueden tomar como valores, cualidades o categorías. Ejemplos:
  - Sexo (hombre, mujer)
  - Salud (buena, regular, mala)
- **Cuantitativas** (o numérica): variables que toman valores numéricos. Ejemplos:
  - Número de casas (1, 2,…). Discreta.
  - Edad (12.5; 24.3; 35;…). Continua.

Tablas de distribución de frecuencias no agrupada

Las tablas de distribución de frecuencia no agrupadas, nos presentan un resumen de los datos en forma tabular y permite analizar rápidamente la información si conocer la presentación original de la información

Ejemplos

Los 15 estudiantes de un grupo responden la pregunta acerca de cuantos hermanos tienen. Las respuestas se presentan en forma de tabla de distribución de frecuencias:

Número de hermanos	f_i
0	3
1	5
2	4
3	2
4	1

Observe con atención la tabla y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cantidad más frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
2. ¿Cuál es la cantidad menos frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
3. ¿Cuántos alumnos son hijos únicos?

Solución:

1. ¿Cuál es la cantidad más frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
   La frecuencia (f_i) más alta es de 5 y corresponde al valor de la variable 1 hermano, por lo tanto, la respuesta correcta a esta pregunta es 1 hermano.

2. ¿Cuál es la cantidad menos frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
   La frecuencia (f_i) más baja es de 1 y corresponde al valor de la variable 4 hermanos, por lo tanto, la respuesta correcta a esta pregunta es 4 hermanos.

3. ¿Cuántos alumnos son hijos únicos?
   Al ser hijos únicos significa que no tienen hermanos, por lo tanto, se debe observar cual es la frecuencia para el valor de la variable 0 hermanos, la cual es de 3; como resultado la respuesta correcta es 3 alumnos del grupo son hijos únicos.

El número de lesiones sufridas por los miembros de un equipo de fútbol en una liga fueron:

Lesiones	f_i
0	6
1	11
2	5
3	2

Observe con atención la tabla y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el total de jugadores en el equipo?
2. ¿Se puede decir que la mayoría del equipo se lesionó en algún momento de la temporada?
3. ¿Cuántos jugadores se lesionaron en 2 ocasiones?

Solución:

1. ¿Cuál es el total de jugadores en el equipo?
   Para conocer el total de jugadores debemos sumar todos los valores de la frecuencia (f_i), por lo que, $6 + 11 + 5 + 2 = 24$. Entonces, la respuesta correcta es que hay 24 jugadores en el equipo.

2. ¿Se puede decir que la mayoría del equipo se lesionó en algún momento de la temporada?
   Dado que solo 6 jugadores de 24 no resultaron lesionados a lo largo de la temporada se puede asumir que, con base en la información presentada, sí la mayoría del equipo se lesionó en algún momento de la temporada.

3. ¿Cuántos jugadores se lesionaron en 2 ocasiones?
   Para poder responder esta pregunta debemos observar el valor de la f_i para la variable 2 lesiones. Entonces la respuesta correcta es: 5 jugadores del equipo se lesionaron en 2 ocasiones.

Una encuesta acerca de la cantidad de medicinas diarias que toman personas mayores de 70 años muestra los siguientes resultados

Medicinas	f_i

0	5
1	8
2	10
3	10
4	4
5	3

Observe con atención la tabla y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cantidad de medicinas que más comúnmente consumen las personas encuestadas?
2. ¿Cuál es la cantidad máxima de medicinas que las personas encuestadas toman en un solo día?
3. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?

Solución:

1. ¿Cuál es la cantidad de medicinas que más comúnmente consumen las personas encuestadas?
   Al hablar de la cantidad de medicinas más común, debemos observar la f_i de mayor valor, que en este caso es 10, pero se repite para las variables 2 medicinas y 3 medicinas. Por lo tanto, la respuesta correcta es: <u>2 y 3 medicinas al día es la cantidad más común de medicinas tomadas por las personas encuestadas.</u>

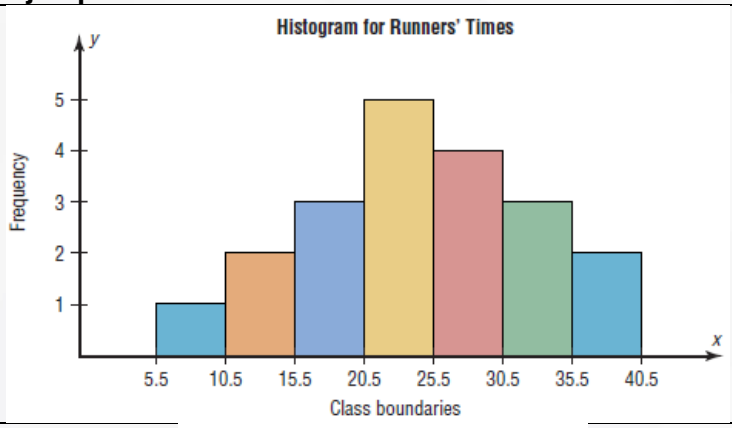
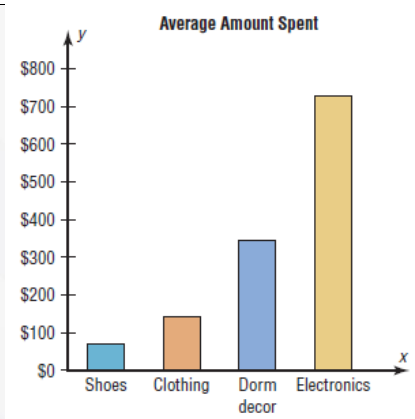
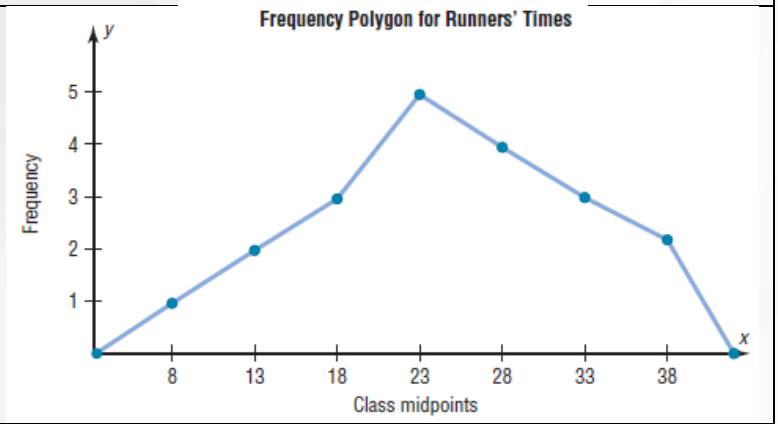
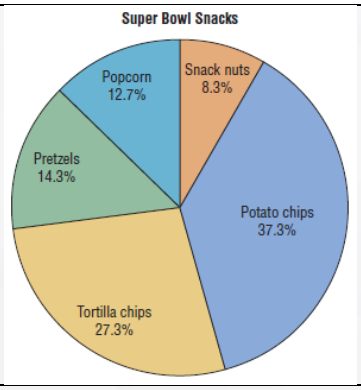
2. ¿Cuál es la cantidad máxima de medicinas que las personas encuestadas toman en un solo día?
   El valor más grande de la variable medicinas es 5, por lo tanto, <u>la cantidad máxima de medicinas que las personas encuestadas toman en un solo día es 5</u>.

3. ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
   Para conocer el total de encuestados debemos sumar todos los valores de la frecuencia (f_i), por lo que, $5 + 8 + 10 + 10 + 4 + 3 = 40$. Entonces, la respuesta correcta es que <u>se encuestó a un total de 40 personas mayores de 70 años</u>.

Gráficos estadísticos

Para la mayoría de las personas es más fácil comprender la información si se le presenta de manera gráfica que si se les presenta de manera numérica en las tablas de frecuencias. Un gráfico estadístico puede ser usado para describir el conjunto de datos y analizarlo.

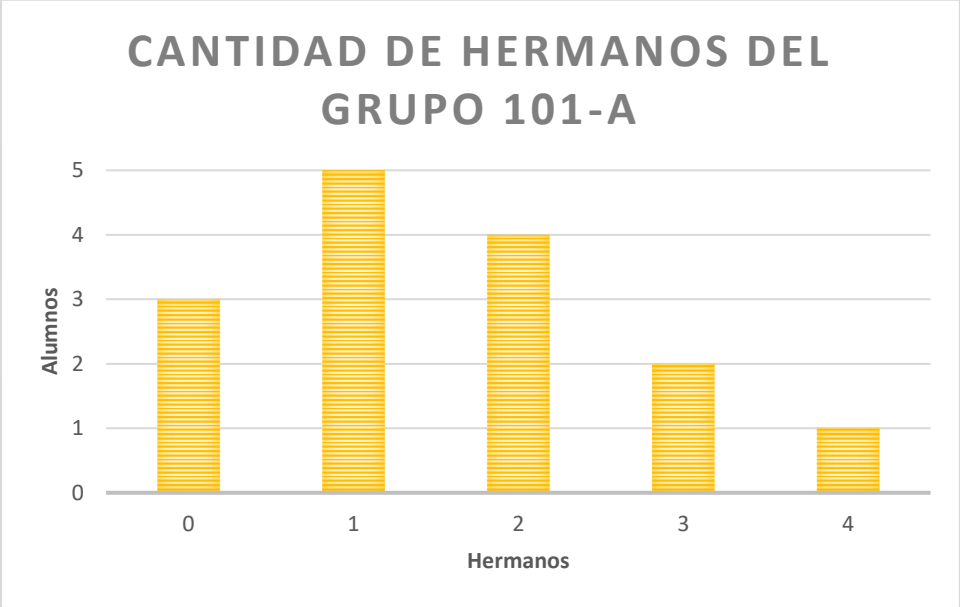
Dentro de los gráficos estadísticos encontramos:

Nombre	**Ejemplo**
Histograma	
Gráfico de barras	
Polígono de frecuencias	
Gráfico circular	

A continuación, se presentan algunos ejemplos para la interpretación de gráficos estadísticos:

Ejemplos

El siguiente gráfico representa las respuestas de los 15 estudiantes de un grupo r acerca de cuantos hermanos tienen.



Observe con atención la tabla y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cantidad más frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
2. ¿Cuál es la cantidad menos frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
3. ¿Cuántos alumnos son hijos únicos?

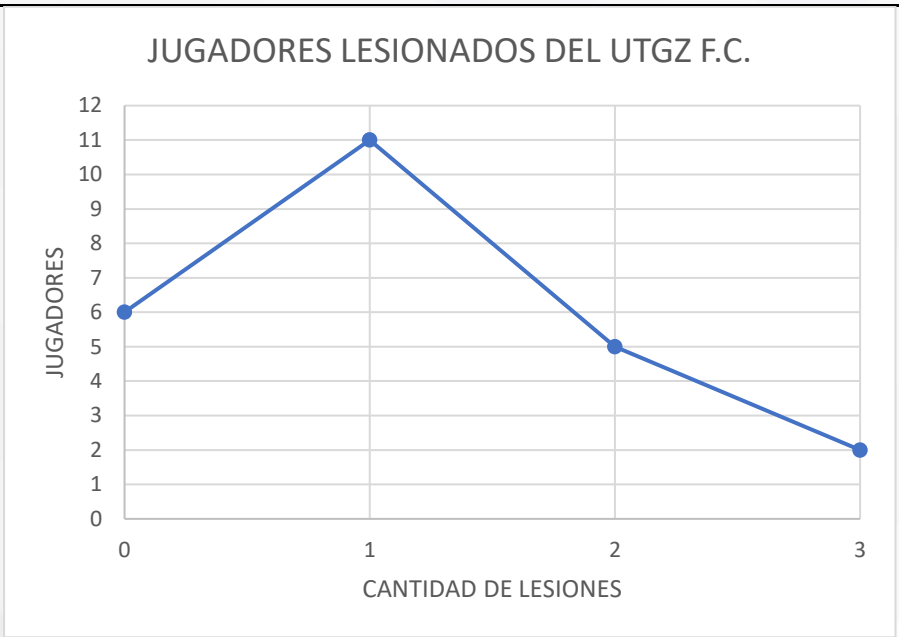
Solución:

1. ¿Cuál es la cantidad más frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
   La frecuencia más alta es de 5 y corresponde al valor de la variable 1 hermano, por lo tanto, la respuesta correcta a esta pregunta es 1 hermano.

2. ¿Cuál es la cantidad menos frecuente de hermanos que tienen los alumnos?
   La frecuencia más baja es de 1 y corresponde al valor de la variable 4 hermanos, por lo tanto, la respuesta correcta a esta pregunta es 4 hermanos.

3. ¿Cuántos alumnos son hijos únicos?
   Al ser hijos únicos significa que no tienen hermanos, por lo tanto, se debe observar cual es la frecuencia para el valor de la variable 0 hermanos, la cual es de 3; como resultado la respuesta correcta es 3 alumnos del grupo son hijos únicos.

El número de lesiones sufridas por los miembros de un equipo de fútbol en una liga fueron:



Observe con atención la tabla y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el total de jugadores en el equipo?
2. ¿Se puede decir que la mayoría del equipo se lesionó en algún momento de la temporada?
3. ¿Cuántos jugadores se lesionaron en 2 ocasiones?

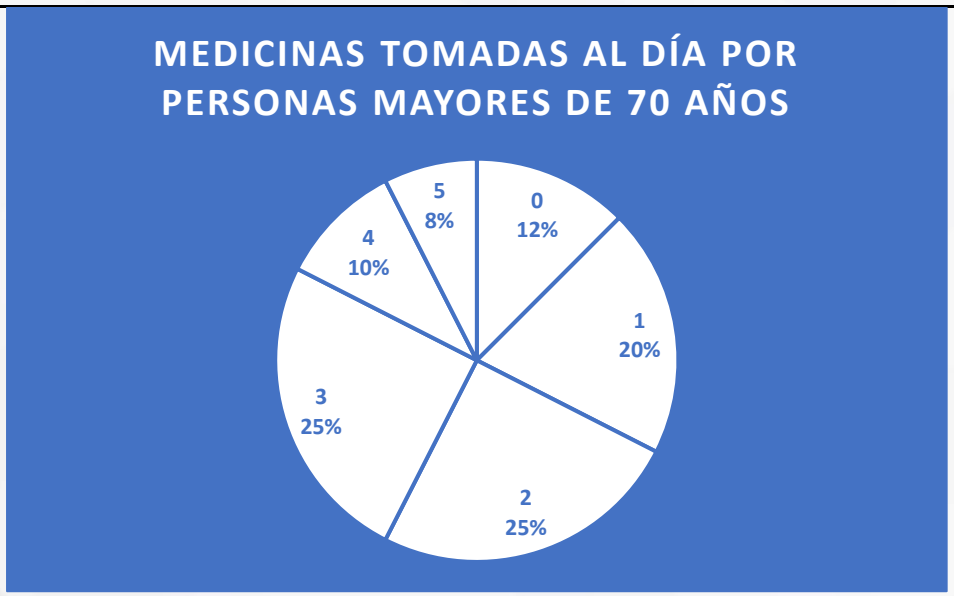
Solución:

1. ¿Cuál es el total de jugadores en el equipo?
   Para conocer el total de jugadores debemos sumar todos los valores de la frecuencia que en esta ocasión se llama "JUGADORES", por lo que, $6 + 11 + 5 + 2 = 24$. Entonces, la respuesta correcta es que <u>hay 24 jugadores en el equipo</u>.

2. ¿Se puede decir que la mayoría del equipo se lesionó en algún momento de la temporada?
   Dado que solo 6 jugadores de 24 no resultaron lesionados a lo largo de la temporada, ya que tienen 0 lesiones, se puede asumir que, <u>con base en la información presentada, sí la mayoría del equipo se lesionó en algún momento de la temporada</u>.

3. ¿Cuántos jugadores se lesionaron en 2 ocasiones?
   Para poder responder esta pregunta debemos observar la altura que alcanzó la variable 2 lesiones. Entonces la respuesta correcta es: <u>5 jugadores del equipo se lesionaron en 2 ocasiones</u>.

Una encuesta acerca de la cantidad de medicinas diarias que toman personas mayores de 70 años muestra los siguientes resultados



Observe con atención la tabla y responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la cantidad de medicinas que más comúnmente consumen las personas encuestadas?
2. ¿Cuál es la cantidad máxima de medicinas que las personas encuestadas toman en un solo día?
3. ¿Qué porcentaje de las personas encuestadas solo toman 1 medicamento al día?

Solución:

1. ¿Cuál es la cantidad de medicinas que más comúnmente consumen las personas encuestadas?
   Al hablar de la cantidad de medicinas más común, debemos observar el porcentaje más alto, en este caso 25%, pero se repite para las variables 2 medicinas y 3 medicinas. Por lo tanto, la respuesta correcta es: 2 y 3 medicinas al día es la cantidad más común de medicinas tomadas por las personas encuestadas.

2. ¿Cuál es la cantidad máxima de medicinas que las personas encuestadas toman en un solo día?
   El valor más grande de la variable medicinas es 5, por lo tanto, la cantidad máxima de medicinas que las personas encuestadas toman en un solo día es 5.

3. ¿Qué porcentaje de las personas encuestadas solo toman 1 medicamento al día?
   Para saber la respuesta debemos buscar la variable 1 medicamento, y así es como sabemos que el 20% de los encuestados toman 1 medicamento al día.

Medidas de tendencia central

Las características globales de un conjunto de datos estadísticos pueden resumirse mediante una serie de cantidades numéricas representativas llamadas parámetros estadísticos. Entre ellas, las medidas de tendencia central, como la media aritmética, la moda o la mediana, ayudan a conocer de forma aproximada el comportamiento de una distribución estadística.

Media aritmética o promedio
Es una de las medidas de tendencia central de mayor uso. La media aritmética se puede representar por $\bar{x}$. Se calcula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Mediana
Se define como Mediana un valor tal que supera a no más del 50% de las observaciones y es superado por no más del 50% de las observaciones, cuando estas han sido ordenadas según su magnitud.

Para hallar la mediana, se recomienda ordenar los datos de manera ascendente o descendente para poder encontrar el valor que queda justo a la mitad.

Cuando se trabaja con una cantidad de datos pares, por ejemplo 20 datos, habrá que calcular el valor que quedaría en el lugar 11.5. Mientras que al trabajar con una cantidad impar de datos, por ejemplo 15, debemos buscar el valor que queda en el lugar 8.

Moda
Como su nombre lo indica es aquel valor de la variable que tiene una mayor frecuencia. Puede existir una moda única (un solo valor con frecuencia dominante), moda múltiple (la frecuencia máxima se repite dos o más veces) o no existir ninguna moda (todos los datos tienen frecuencia igual a 1).

Ejemplos
15 estudiantes responden la pregunta acerca de cuantos hermanos y/o hermanas tienen. Las respuestas fueron: 1, 1, 2, 0, 3, 2, 1, 4, 2, 3, 1, 0, 0, 1, 2 ¿Cuál es la media aritmética, mediana y moda? Solución: <u>Media aritmética</u>: Para este ejemplo, la variable a medir es el número de hermanos, por lo que las respuestas de los alumnos corresponden con los datos de x_1 a x_{15} y n es la cantidad de participantes. Por lo que al sustituir los valores de la fórmula obtenemos: $\bar{x} = \frac{1+1+2+0+3+2+1+4+2+3+1+0+0+1+2}{15} = \frac{23}{15}$ $\bar{x} = 1.53$ Es decir, que en promedio esos 15 alumnos tienen 1.53 hermanos. <u>Mediana</u>: Para hallar la mediana se ordenarán los datos de manera ascendente: 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4 Debe haber la misma cantidad de datos hacia la izquierda que hacia la derecha, siendo 15 el total de datos, el centro queda en el valor 8, ya que tiene 7 datos a la izquierda y 7 a la derecha. Contamos hasta llegar al valor 8 y así determinamos que la mediana es 1. <u>Moda</u>: La moda es el valor que más ocasiones se repite, en este caso el número 1 se repite 5 veces, por lo tanto, tenemos una moda única que es 1 hermano.

El número de lesiones sufridas por los miembros de un equipo de fútbol en una liga fueron:

0, 1, 2, 1, 3, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 0, 1

¿Cuál es la media aritmética, mediana y moda?

Solución:

<u>Media aritmética</u>:

$$\bar{x} = \frac{0+1+2+1+3+0+1+0+1+2+0+1+1+1+2+0+1+3+2+1+2+1+0+1}{24} = \frac{27}{24}$$

$$\bar{x} = 1.125$$

Es decir, que en promedio esos 24 jugadores se lesionaron 1.125 veces a lo largo del torneo.

<u>Mediana</u>:

Para hallar la mediana se ordenarán los datos de manera ascendente:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3

Debe haber la misma cantidad de datos hacia la izquierda que hacia la derecha, siendo 24 datos, el centro queda entre los valores 12 y 13, ya que así tendrían 12 datos a la izquierda y 12 a la derecha. Contamos hasta llegar a los valores 12 y 13, para poder sacarles la mitad y así determinamos que la mediana es:

$$Mediana = \frac{x_{12} + x_{13}}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

<u>Moda</u>:

La moda es el valor que más ocasiones se repite, en este caso el número 1 se repite 11 veces, por lo tanto, la moda es única y es 1 lesión.

Una encuesta acerca de la cantidad de medicinas diarias que toman personas mayores de 70 años muestra los siguientes resultados:

3, 1, 2, 2, 0, 1, 4, 2, 3, 5, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 0, 1, 2, 0, 2, 3, 0, 1, 1, 5, 3, 4, 2, 3, 0, 1, 2, 3

¿Cuál es la media aritmética, mediana y moda?

Solución:

<u>Media aritmética</u>:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{40} = \frac{89}{40} = 2.225$$

Es decir, que en promedio esas 40 personas toman 2.225 medicinas al día.

<u>Mediana</u>:

Para hallar la mediana se ordenarán los datos de manera ascendente:

0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5

Debe haber la misma cantidad de datos hacia la izquierda que hacia la derecha, siendo 40 datos el centro queda entre los valores 20 y 21, ya que así tendrían 20 datos a la

izquierda y 20 a la derecha. Contamos hasta llegar a los valores 20 y 21, para poder sacarles la mitad y así determinamos que la mediana es:

$$Mediana = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

<u>Moda</u>:
La moda es el valor que más ocasiones se repite, en este caso el número 2 y el número 3 se repiten 10 veces cada uno, por lo tanto, tenemos una moda múltiple con valores de 2 y 3 medicinas.

INGLÉS

"Language is the road map of a culture. It tells you where its people come from and where they are going"
RITA MAE BROWN

Lo que se evalúa en el examen diagnóstico de lengua inglesa es el conocimiento de gramática, considerando los tiempos verbales y vocabulario, acordes al nivel educativo de bachillerato. Para lo cual se contemplan evaluar habilidades gramaticales y de comprensión lectora propios de un nivel A2, de acuerdo al marco común europeo de referencia para las lenguas.

GRAMÁTICA Y VOCABULARIO

Verbo to be

Usamos el verbo to be para decir quiénes somos y nuestra profesión, para hablar del clima, el tiempo, lugares y para decir la edad de las personas.

Ejemplos:

I am Steve and this **is** my friend Bill. **We are** from Scotland.
It is cold today.
It's ten O'clock.
Milan **is** in the north of Italy.
My sister **is** six years old.

El verbo to be tiene una forma completa y también se hace uso de las contracciones en su forma afirmativa y negativa.

Puedes repasar esta información con las siguientes tablas:

BE	PRESENTE (Full form)				
+	I am	you are	he/she/it is	we are	they are
?	am I?	are you?	is he/she/it?	are we?	are they?
-	I am not	you are not	he/she/it is not	we are not	they are not

BE	PRESENTE. (Contractions)				
+	I'm	You're	He's/She's/It's	We're	They're
-	I'm not	You're not You aren't	He's not/ He isn't She's not/She isn't	We're not We aren't	They're not They aren't

Verbo to have

Podemos usar el verbo tener, 'have' en Inglés, para hablar de posesiones, familia (y otras relaciones, y enfermedades.

Ejemplos:

I **have** a new car. Nina **has** two sisters. We all **have** colds.

You **have** beautiful eyes. My new car only **has** two doors.

Puedes repasar esta información con las siguientes tablas:

HAVE	PRESENTE				
+	I have	you have	he/she/it has	we have	they have
?	Do I have?	Do you have?	Does he/she/it have?	Do we have?	Do they have?
-	I don't have	You don't have	he/she/it doesn't have	we don't have	they don't have

There is / There are

Usualmente usamos 'there is' y 'there are', 'hay' en español, para decir que algo o alguien existe.

Utilizamos 'there is' antes de un sustantivo singular, y 'there are' con sustantivos plurales.

Ejemplos:

There is a dog in the garden. (singular)

There are some letters for you. (plural)

There are tissues in the room. (plural)

There is a comb on the shelf. (singular)

Puedes repasar esta información con las siguientes tablas:

	PRESENT	
+	there is	there are
?	is there?	are there?
-	there is **not**	there are **not**
	Contractions: There's, there isn't, there aren't.	

Artículos A/An

Los artículos 'a' o 'an' en inglés expresan singularidad. Usa el artículo 'a' antes de los sustantivos que comienzan con una consonante. Usa el artículo 'an' antes de los sustantivos que comienzan con una vocal.

Puedes repasar esta información con las siguientes tablas:

A	AN
a student	**an** accountant
a teacher	**an** engineer
a programmer	**an** illustrator

Verbo 'Can'

Usamos el verbo 'Can', en español el verbo poder, para hablar de cosas que podemos o no podemos hacer.

Ejemplos:

She **can** speak Japanese.
He **can't** swim.
Can you skate?

Can	PRESENTE				
+	I can	you can	he/she/it can	we can	they can
?	Can I?	Can you?	Can he/she?	Can we?	Can they?
-	I can't	you can't	he/she/it can't	we can't	they can't

Pronombres Posesivos

Los pronombres posesivos son palabras que demuestran pertenencia a alguien o algo. Estos pronombres sustituyen a los sustantivos y evitan la repetición de la información previamente dicha.

Observa el siguiente ejemplo:

This **cell pone** is my **cell phone**. It is not your **cell phone**.

This cell phone is **mine**. It is not **yours**.

En este caso '**my cell phone'** ha sido sustituido por pronombre posesivo **'mine'**. En la segunda oración '**your cell phone'** ha sido sustituido por el pronombre posesivo **'yours'**.

Los pronombres posesivos mantienen su forma base con el uso de los sustantivos plurales o singulares.

Jack: is it your pencil?
Jacob: Yes, it is **mine**.

Jack: are these your color pencils?
Jacob: Yes, they are **mine**.

Los pronombres posesivos en Inglés son los siguientes:

Mine - mío
Yours – tuyo
His – suyo (de él)
Hers – suyo (de ella)
Ours - Nuestro
Yours – suyo (de ustedes)
Theirs – suyo (de ellos)

Examples:

My costume is fantastic, **yours** is too.

Adjetivos Posesivos

Son palabras que modifican a un sustantivo para mostrar una forma de posesión, sentido de pertenencia o propiedad de una persona específica, animal o cosa.

I – **My**
My name is Joe.

My dog is black.

You-**Your**
Your name is Christopher.

What's **your** e-mail?

Girls, can you write **your** phone numbers on the list?

He- **His**
What is **his** name?

Harry lives in Paris, **his** house is near the Eiffel tower.

She- **Her**
Mary lives in New York; **her** house is small but beautiful.

Anna likes animals, **her** pets are three white cats.

We - **Our**
We like **our** school and **our** teachers.

Our dogs aren't dangerous.

They – **Their**

The boys have **their** own apartment.

The girls gave me **their** money for **their** books.

Presente Simple. Forma Afirmativa.

Usamos el presente simple para hablar de actividades diarias, rutinas y situaciones permanentes.

Podemos formar oraciones afirmativas siguiendo esta estructura: Sujeto, verbo en presente y complemento.

Subject	Verb in present	complement
I	live	close to school.
He	lives	close to school.
We	take	English classes every Saturday.

Al formar oraciones con las terceras personas del singular, los verbos tendrán una modificación, y se les agregará el sufijo -s, -es, o -ies.
Para la mayoría de los verbos, agregamos -s a la forma base del verbo.

work-work**s**
play-play**s**

Para los verbos con terminación -o, -ch, -s, -sh, -x o -z, agregamos -es a la forma base del verbo.

teach-teach**es**
miss-miss**es**
watch-watch**es**

Para los verbos con terminanción consonante + y, sustituimos la -y por una -i y agregamos -es.

study-stud**ies**
carry-carr**ies**

Presente Simple. Forma Negativa.

Podemos formar oraciones negativas en presente simple siguiendo esta estructura: Sujeto, verbo auxiliar en negativo do not o does not, verbo en infinitivo y complemento. Usualmente usamos la contracción del verbo auxiliar en negativo de manera informal.

Subject	Negative Auxiliar verb: don't / doesn't	verb in infinitive	complement
I	do not / don't	watch	TV.
She	does not / doesn't	study	on weekends.
They	do not / don't	practice	Soccer in the afternoons.

Presente Simple. Forma Interrogativa.

Para realizar preguntas, tenemos dos opciones. Preguntas con respuesta corta, si o no, y preguntas con -wh words.

Para las preguntas con respuesta corta, haremos uso de los auxiliares **DO** y **DOES** al inicio de de nuestra oración. Después elegiremos nuestro sujeto, haremos uso de un verbo en su forma base, y finalmente complementaremos nuestra oración.

Por ejemplo:

Do you like cars?

Does she speak English?

Do they live in Brazil?

Las wh- words son 'what', 'where', 'when', 'who' and 'how'. Usamos 'what' para preguntar por acciones, objetos o cosas. Usamos 'where' para preguntar por lugares. Usamos 'when' para preguntar ¿cuándo…? Usamos 'who' para preguntar ¿quién…? Y usamos 'how' para preguntar ¿cómo…?

Para estructurar una preguntar con una wh- Word, necesitamos una wh- Word al inicio de la oración, después el auxiliar ‘do’ o ‘does’, después un sujeto, un verbo en su forma base y el complemento.

Por ejemplo:

What
What do you usually do in your free time?

Where
Where do you study?

When
When do you exercise?

Who
Who do you work with?

How
How often do you study English?

Vocabulary

Para enriquecer tu vocabulario, estudia la siguiente información. En esta lista encontrarás las palabras en inglés y se te sugiere intentar buscar su significado en un diccionario en inglés o en un diccionario inglés – español como segunda opción.

Professions and occupations

Accountant
Actor/ Actress
Architect
Astronomer
Author
Baker
Bricklayer
Bus driver
Butcher
Carpenter

Chef/Cook
Cleaner
Dentist
Designer
Doctor
Refuse collector
Electrician
Engineer
Factory worker
Farmer

Lifeguard
Mechanic
Model
Newsreader
Nurse
Optician
Painter
Pharmacist
Photographer
Pilot

Plumber
Politician
Policeman
Postman

Receptionist
Scientist
Secretary
Shop assistant
Soldier

Tailor
Taxi driver
Teacher
Translator
Traffic warden
Travel agent
Veterinary
Waiter/Waitress
Window cleaner

Family members

Para enriquecer tu vocabulario, estudia la siguiente información. En esta lista encontrarás vocabulario relacionado con los miembros de la familia y relaciones familiares.

Mother/Mom	sister	wife
Father/Dad	brother	divorced
Parents	aunt	ex-husband
Daughter	uncle	ex-wife
Son	niece	boyfriend
Grandfather	nephew	girlfriend
Grandmother	cousin	friends
Grandparents	single	co-workers
Grandson	married	
Granddaughter	husband	

COMUNICACIÓN

En esta sección podrás encontrar ejemplos de conversaciones de acuerdo a las funciones del idioma inglés.

Saludos

Hello, hi (informal)	Hola
Good morning	Buenos días
Good afternoon	Buenas tardes (después de las 12pm).
Good evening	Buenas noches (después de las 6pm).
Good night	Buenas noches (sólo se ocupa para despedirse).

Los saludos generalmente se usan seguidos del nombre o del título y el apellido de la persona. Por ejemplo:

Good morning, Anne Buenos días, Anne.

Al hablar con una persona que no conocemos bien o para saludar de manera formal y cortés usamos los títulos: sir, ma'am, o miss.

Hello, sir. Hola, señor.

Para hablar con un señor(a) usando su apellido, se usa: Mr. y Mrs.

Hello, Mr. Smith. Hola, señor Smith.
Hello, Mrs. Taylor Hola, señora Taylor.

Para hablar con una señorita usando su apellido, se usa Miss.

Hello Miss Morgan. Hola, señorita Morgan.

Actualmente, hay un nuevo título que algunas mujeres prefieren utilizar para evitar la distinción entre mujer casada (Mrs.) y soltera (Miss). El título es Ms. y sólo se usa con el apellido de la mujer.

Hello, Ms. Jones. Hola, Srta. o Sra. Jones.

Para preguntar “¿Cómo estás?” O ¿cómo está usted?”, decimos:

How are you?
How are you doing?

Otra manera de preguntar “How are you?” que se puede usar con los amigos y con personas de confianza. Es la expresión: How's it going? Que significa ¿Cómo te va? o ¿Qué tal?

Hay varias formas de responder "bien" en inglés. Es decir que aparte de **fine**, usamos **all right** o **good**. También se puede agregar la palabra “thank you” que en inglés significa “gracias.

Así que para decir “bien, gracias” en inglés, juntamos las dos palabras y decimos:

Fine, thank you. Bien, gracias.

Si nos dicen “How are you?” podemos usar el pronombre “I” de la siguiente forma:

I'm fine, thanks. Estoy bien, gracias.

Thanks es una manera más corta de decir thank you y es más informal.

Cuando alguien nos pregunta “how are you?”, es de buena educación hacerle la misma pregunta a la persona. Para hacerlo, simplemente decimos:

And you? ¿Y tú? o ¿Y usted?

Ejemplo:

Pablo: Hi, Ben. How are you? Ben: Fine, thanks, Pablo. And you? Pablo: I’m OK, thanks.

Presentación

Cuando conocemos a una persona y queremos preguntar su nombre ocupamos:

What's your name? ¿Cómo te llamas? o ¿Cómo se llama?

What's es una manera más corta de decir What is y generalmente se usa en conversaciones. Sin embargo, en situaciones formales, se puede decir What is.

Para decir nuestro nombre, podemos utilizar I’m + (su nombre) o My name is + (su nombre)

I’m Diane
My name is Diane. Me llamo Diane.

Nice to meet you, se utiliza para decir gusto en conocerte y la otra persona puede responder **nice to meet you too** o **and you** que significa igualmente.

Para presentar a otra persona decimos **this is**, por ejemplo:

Hi Janice, this is my friend Laura. Laura, this is Janice	Hola Janice, ella es mi amiga Laura. Laura, ella es Janice.

En la siguiente conversación, dos personas se presentan a sí mismas.

A: Hello. My name's Pablo. What's your name?
B: Hi, Pablo. I'm Lisa.
A: Nice to meet you, Lisa.
B: And you.

Información personal

La información personal que normalmente se proporciona durante una interacción transaccional es: nombre, apellidos, número de teléfono o celular, correo electrónico, dirección, etc. Para preguntar el apellido decimos **what's your last name**?. En caso de requerir que la otra persona deletree su apellido preguntamos **how do you spell it?** Para preguntar el número de teléfono o celular decimos **what's your cell phone number**? Si queremos preguntar el correo electrónico entonces la pregunta es **what's your email address?**

Ejemplo:

A: Hello. What's your name?
B: Alex. That's A-L-E-X.
B: And your last name?
C: Smith.
A: Smith? How do you spell it?
B: That's S-M-I-T-H.
A: What's your cell phone number?
B: 8994356782

Expresiones sociales

Podemos ocupar las siguientes expresiones sociales durante una conversación.

Excuse me	Disculpe
Sorry	Lo siento
Thanks/ thank you/ thank you very much	Gracias/ muchas gracias
Please	Por favor
I don't understand/ I don't know	No entiendo/ no sé
That's very kind	Es muy amable

Ejemplos:

A: Excuse me, where's the restroom? B: I'm sorry. I don't know.	A: What time is it? B: I'm sorry. I don't understand.
A: Can you help me with those boxes, please? B: Sure A: Thank you very much.	

Direcciones

Para pedir una dirección a un desconocido es importante ser amables en todo momento, por ello utilizamos **"excuse me…"** antes de pedir una dirección.

Excuse me, could you tell me how I can get to the supermarket?
Disculpe, ¿podría decirme cómo llegar al supermercado?

Además, realizamos **preguntas indirectas** para sonar más amables. Al utilizar una pregunta indirecta el sujeto (the city center) precede al verbo (is). Veamos la diferencia entre una pregunta directa y una indirecta.

Pregunta directa	Pregunta indirecta
Where **is the city center**?	*Do you know* where **the city center is**?
¿Dónde está el centro de la ciudad?	¿Sabe dónde está el centro de la ciudad?

Otras formas de pedir una dirección:

Can you tell me the way to the station?	¿Me puede decir cómo llegar a la estación?
Is there a post office near here?	¿Hay alguna oficina de correos cerca de aquí?

"Could you tell me…?" es un poco más cortés que "can you tell me…?".

Para dar una dirección utilizamos el modo imperativo, el cual permite al emisor dirigirse al receptor directamente. El modo imperativo se construye con la forma base del verbo.

Turn left into High Street.	Gire a la derecha en High Street.

También podemos utilizar el siguiente vocabulario para dar una dirección:

Go straight on _____Street	Camine en línea recta sobre la calle ____
Walk along/ past… (the supermarket, the police station, etc.)	Camine por/ pasa por (el supermercado, la estación de policía, etc.)
Take the first/second turning on the left/right	Tome la primera/segunda calle a la izquierda/derecha.
Turn left/right into…	Gire a la izquierda/ derecha en
It's on the corner	Está en la esquina

Ejemplo:

A: Excuse me, is there a bank near here? B: Yes, go straight on High Street. Walk past the post office. The bank is on the corner next to the bus station. A: Thanks a lot.

Ordenar comida

Para ordenar comida, utilizamos las siguientes frases:

I'd like… + la comida o bebida que queremos
I'll have…

I'd like the strawberry salad, please. Quiero la ensalada de fresa, por favor.
I'll have the strawberry salad

Para pedir la cuenta, se utiliza la expresión **Can I have the check, please?**

Ejemplo:

Waiter: Are you ready to order, sir? Customer: Yes, I am. **I'd like** the tomato and mozzarella salad to start, please. Waiter: And to follow? Customer: **I'll have** the salmon salad with some chips on the side. Waiter: anything to drink? Customer: Water, please. Waiter: still or sparkling? Customer: Still Waiter: Fine. I'll bring the drink immediately. 1 hour later **Can I have the check, please?**	Mesero: ¿Está listo para ordenar señor? Comensal: Sí. De entrada, me gustaría ordenar la ensalada de tomate con mozzarella, por favor. Mesero: ¿y de plato fuerte? Comensal: La ensalada de salmón con papas. Mesero: ¿algo de tomar? Comensal: Agua, por favor. Mesero: ¿con o sin gas? Comensal: Sin gas Mesero: De acuerdo. Traeré su bebida de inmediato. Una hora después ¿Me puede traer la cuenta, por favor?

Pedir y ofrecer ayuda

Para pedir ayuda podemos utilizar las siguientes frases:

Can/could you help me, please? ¿Puedes/ podrías ayudarme, por favor?
Would you mind helping me out? ¿Te molestaría ayudarme?

Una expresión informal que podemos utilizar con amistades, familiares o personas cercanas es **Could you give me a hand?** Literalmente significa me puedes dar una mano o echar una mano.

Para ofrecer ayuda decimos:

Would you like some help?	¿Te gustaría recibir ayuda?
Can I help you?	¿Te puedo ayudar?
Do you need any help?	¿Necesitas ayuda?

Cuando nos ofrecen ayuda podemos aceptarla o rechazarla de la siguiente manera.

Yes. That would be great.	Sí. Estaría genial.
Yes, please.	Sí, por favor.
I think I've got it.	Creo que puedo solo.
No, thanks. I'm just looking.	No, gracias. Sólo estoy viendo.
No, thanks. I can manage it.	No, gracias. Puedo manejarlo.

Ejemplo:

Sugerencias

Cuando realizamos una sugerencia, podemos utilizar las siguientes estructuras seguidas del verbo en infinito sin la preposición *to.*

Why don't we go for a walk?	¿Por qué no vamos a dar un paseo?
Let's take a break.	Tomemos un descanso
Shall we go to the movies?	¿Vamos al cine?

En el caso de Would you like to…?**,** ésta va seguida del verbo en infinitivo con la preposición *to.*

Would you like to come with me to the party?	¿Te gustaría ir conmigo a la fiesta?

También podemos utilizar la siguiente estructura para realizar sugerencias, sólo que ésta va seguida de un verbo con terminación -ing.

How about going out?	¿Qué te parece si salimos?

Para aceptar o rechazar una sugerencia, podemos utilizar el siguiente vocabulario:

That's a good idea. Sure. I'd love to.	Es una buena idea. Claro. Me encantaría.
Sorry, I can't. I'm afraid I can't. I'd love to but…	Lo siento. No puedo. Me temo que no puedo. Me encantaría pero…

CRÉDITOS

La guía de examen, así como el presente material de estudio para el proceso de ingreso a la UTGZ 2024, fue desarrollado en equipos de especialistas en cada área, como se muestra a continuación.

Español:

- Alittia Sánchez del Ángel, allitia_d@utgz.edu.mx
- Juan Pablo Rosas Vázquez, juan.rosas@utgz.edu.mx
- Erika Lugo Ramírez, erika.lugo@utgz.edu.mx

Matemáticas:

- Félix Bautista Meza, felix.bautista@utgz.edu.mx
- Jorge Alberto Hernández Benavides, jorgehernandez@utgz.edu.mx
- Oscar Enrique Morales Moguel, oscar_d@utgz.edu.mx
- Julio Alfonso Armenta Barrios, julio_d@utgz.edu.mx

Inglés:

- Zita Monserrat Alvarado Fernández, zita.alvarado@utgz.edu.mx
- Joana Hernández Castillo, joana.hernandez@utgz.edu.mx